MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC, BUCUREȘTI

Prof. ing. dr. MARCEL N. ROȘCULEȚ

Manual de Analiză matematică

vol. I

ALGEBRA. CALCULUL DIFERENȚIAL

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI—1964

ALGEBRA

Capitolul I

MULŢIMI. NUMERE. STRUCTURI

§ 1. NOŢIUNI DE TEORIA MULŢIMILOR

1. Mulţimi. Element al unei mulţimi. Apartenenţă

Noţiunea de mulţime poate fi lămurită mai potrivit prin exemple.

Spectatorii dintr-o sală, paginile unei cărţi, muncitorii dintr-o uzină, numerele întregi şi pozitive, literele alfabetului latin sînt mulţimi. Obiectele din care este formată o mulţime se numesc *elementele* mulţimii. Elementele unei mulţimi pot fi obiecte de orice natură.

Exemple

1) Dacă N este mulţimea formată din toate numerele întregi şi pozitive numărul 3 este un element al mulţimii N.

2) Dacă A este mulţimea formată din literele alfabetului elin, atunci λ este un element al mulţimii A.

O mulţime este definită dacă avem un mijloc de a deosebi elementele mulţimii de alte elemente care nu fac parte din mulţime. O mulţime este definită dacă sînt date elementele sale sau dacă ni se dă o proprietate pe care o au toate elementele sale, proprietate care le deosebeşte de elementele altei mulţimi.

Dacă o mulţime este dată prin elementele sale, mulţimea se notează scriind în acolade aceste elemente, iar dacă mulţimea este dată printr-o proprietate care caracterizează elementele sale, mulţimea se notează specificînd în acolade această proprietate.

Exemple

1) Mulţimea A formată din elementele a, b, c, d se notează

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

2) Mulţimea M formată din numerele naturale mai mari decît 5 se notează

$$M = \{x \mid x \in N, x > 5\}.$$

Dacă a este un element al mulţimii A se scrie

$$a \in A \quad \text{sau} \quad A \ni a$$

și se citește „a aparține mulțimii A". Semnul $\in$ se numește semnul de *apartenență*. Dacă b nu este element al mulțimii A se scrie

$$b \notin A$$

și se citește „b nu aparține mulțimii A".

Exemple

1) Fie E mulțimea literelor alfabetului elin; $a \notin E$, $\lambda \in E$.

2) Fie $N = \{1, 2, \dots\}$ mulțimea numerelor naturale; $3 \in N$, $\frac{3}{2} \notin N$.

3) $2 \in \{1, 2, 4, 7\}$; $5 \notin \{1, 2, 4, 7\}$.

2. Submulțimi. Incluziune

Fie două mulțimi A și B. Dacă *toate* elementele mulțimii A sînt și elemente ale mulțimii B, atunci spunem că A este *submulțime* a mulțimii B și se scrie

$$A \subset B \quad \text{sau} \quad B \supset A,$$

citindu-se astfel: „mulțimea A este inclusă (conținută) în mulțimea B" sau „mulțimea B include (conține) mulțimea A". Semnul $\subset$ se numește semnul de *incluziune*. Dacă mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B se scrie

$$A \not\subset B \quad \text{sau} \quad B \not\supset A$$

și se citește „A nu este inclusă în B" sau „B nu include pe A".

Mulțimea A se numește *submulțime strictă* a lui B dacă $A \subset B$ și B conține cel puțin un element care nu aparține lui A.

Mulțimile A și B sînt egale dacă $A \subset B$ și $B \subset A$ și se scrie $A = B$.

Exemple

1) Mulțimea $A = \{1, 2, 7\}$ este o submulțime strictă a mulțimii $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$.

2) Mulțimea numerelor naturale pare $P = \{2, 4, 6, \dots\}$ este o submulțime strictă a mulțimii numerelor naturale $N = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Relația de incluziune are următoarele proprietăți:

1) $A \subset A$; relația de incluziune este reflexivă;

2) $A \subset B$ și $B \subset A \Rightarrow A = B$; relația de incluziune este antisimetrică;

3) $A \subset B$ și $B \subset C \Rightarrow A \subset C$; relația de incluziune este tranzitivă.

Semnul $\Rightarrow$ se citește „implică" sau „atrage" și este semnul implicației logice.

3. Reuniune. Intersecție. Diferență. Complementară

Fie A și B două mulțimi. Se numește *suma* sau *reuniunea* mulțimilor A și B mulțimea S a elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile A sau B (fig. 1); se notează

$$S = A \cup B$$

și se citește „A reunit cu B". Semnul $\cup$ se numește *semn de reuniune.*

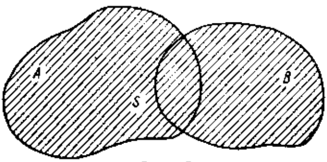
Din definiție rezultă că

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \quad \text{sau} \quad x \in B \}.$$

Exemple

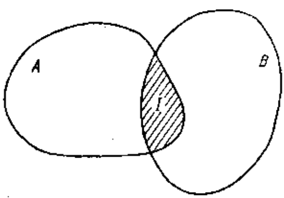
1) $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 7, 9, 11\}$
$A \cup B = \{1, 2, 4, 7, 9, 11\}$

2) Fie $I = \{1, 3, 5, \ldots\}$ mulțimea numerelor naturale impare și $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ mulțimea numerelor naturale pare; reunirea lor $P \cup I$ este mulțimea numerelor naturale $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.



S = A∪B

Fig. 1.



I = A∩B

Fig. 2.

În mod asemănător se definește reuniunea mai multor mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1, \text{ sau } x \in A_2, \text{ sau } \ldots$$
$$\ldots \text{ sau } x \in A_n \}.$$

Se numește *intersecție* a mulțimilor A și B mulțimea I a elementelor care aparțin și mulțimii A, și mulțimii B (fig. 2). Se notează

$$I = A \cap B$$

și se citește „A intersectat cu B". Semnul $\cap$ se numește *semn de intersecție.* Din definiție rezultă că

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \quad \text{și} \quad x \in B \}.$$

Exemple

1) Dacă $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 7\}$, atunci $A \cap B = \{3\}$.

2) Dacă $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$, atunci $N \cap P = \{2, 4, 6, \ldots\}$.

3) Intersecția a două mulțimi A și B avînd ca elemente punctele interioare a două cercuri secante este formată de mulțimea I a punctelor comune.

Două mulțimi A și B care nu au nici un element comun se numesc *disjuncte.* Spunem că intersecția lor este mulțimea vidă, mulțime care se notează θ. Mulțimea vidă (deșartă) este acea mulțime care nu conține nici un element.

Exemplu

Mulțimea numerelor pare P și mulțimea numerelor impare I sînt disjuncte $P \cap I = \emptyset$.

Intersecția mai multor mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se definește în mod asemănător

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ și } x \in A_2 \text{ și} \ldots \text{ și } x \in A_n\}.$$

Exemplu

$A_1 = \{1, 3, 4, 5, 7\}$, $A_2 = \{1, 4, 5, 9\}$, $A_3 = \{1, 3, 5\}$
$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1, 5\}$.

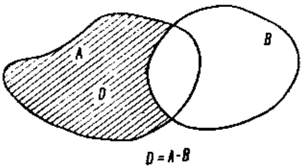


Fig. 3.

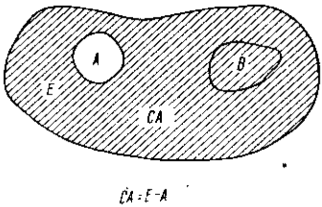


Fig. 4.

Fie E o mulțime și A, B două submulțimi ale lui E.

Mulțimea D a elementelor care aparțin lui A și nu aparțin lui B se numește *diferența* dintre A și B (fig. 3); se notează

$$D = A - B.$$

$A - B$ se citește „A minus B". Conform definiției

$$A - B = \{x \mid x \in A, \ x \notin B\}.$$

Dacă $A \cap B = \emptyset$ atunci $A - B = A$, dacă $A \subset B$, $A - B = \emptyset$.

Diferența $E - A$ se numește complementara lui A în raport cu E și se notează $\complement A$ (fig. 4), deci

$$\complement A = \{x \mid x \in E, \ x \notin A\}.$$

Exemple

1) Complementara mulțimii numerelor naturale impare față de mulțimea numerelor naturale este mulțimea numerelor naturale pare.

2) Fie E_3 mulțimea punctelor din spațiu (spațiul cu trei dimensiuni) și S mulțimea punctelor din interiorul și de pe suprafața unei sfere date. Complementara mulțimii S este mulțimea punctelor din spațiu exterioare suprafeței S.

Următoarele proprietăți se verifică cu ușurință

1) $\complement \emptyset = E$, $\complement E = \emptyset$
2) $\complement \complement A = A$
3) $A \cup \complement A = E$, $A \cap \complement A = \emptyset$.

Din definiția complementarei rezultă

4) $x \in A \Leftrightarrow x \notin \complement A$ și

5) $x \in \complement A \Leftrightarrow x \notin A$.

Semnul $\Leftrightarrow$ este semnul echivalenței logice și se citește „este echivalent cu".

4. Puterea mulțimilor

Fie două mulțimi A, B. Spunem că cele două mulțimi au aceeași putere sau că sînt echivalente dacă între elementele lor $a \in A$, $b \in B$ se poate stabili o *corespondență biunivocă*, adică putem forma perechi (a, b) astfel încît:

1) în fiecare pereche să se găsească un element $a \in A$ și un element $b \in B$;

2) orice element $a \in A$ și orice element $b \in B$ să aparțină unei perechi;

3) nici un element $a \in A$ și $b \in B$ să nu figureze în mai mult de o pereche.

Mulțimile care au aceeași putere cu mulțimea primelor n numere naturale se numesc *mulțimi finite*. Mulțimile finite au, așadar, un număr finit de elemente. Două mulțimi finite au aceeași putere dacă au același număr de elemente. În adevăr, numai în această situație putem realiza corespondența biunivocă între cele două mulțimi.

Exemple

1) Mulțimile $\{1, 3, 5\}$, $\{a, b, c\}$ au aceeași putere.
2) Mulțimile $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ nu au aceeași putere.

Mulțimile care nu sînt finite se numesc mulțimi infinite.

Cea mai simplă mulțime infinită este mulțimea numerelor naturale $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Se numește *mulțime numărabilă* orice mulțime care are aceeași putere cu mulțimea numerelor naturale. Din această definiție rezultă că elementele unei mulțimi numărabile A pot fi așezate întotdeauna într-un șir infinit de elemente distincte

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

indicele n fiind numărul natural în corespondență cu a_n.

Exemplu

Mulțimile infinite $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ și $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ au aceeași putere. Într-adevăr, putem realiza o corespondență biunivocă între elementele celor două mulțimi cu ajutorul perechilor $(n, 2n)$.

Acest exemplu arată că, deși mulțimea P este o submulțime strictă a mulțimii N, totuși mulțimile P și N au aceeași putere.

Se poate obține un rezultat și mai general, anume că orice submulțime a unei mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă sau finită.

Aplicație. Reuniunea unei mulțimi numărabile de mulțimi numărabile este tot o mulțime numărabilă. Vom presupune mulțimile disjuncte. Avem

$$
\begin{array}{l}
A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots\} \\
\quad\ \downarrow \ \nearrow \ \rightarrow \ \swarrow \ \ \nearrow \\
A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots\} \\
\quad\quad \swarrow \ \ \nearrow \\
A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}, \dots\} \\
\quad\ \downarrow \ \nearrow \\
A_4 = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, \dots, a_{4n}, \dots\} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_p = \{a_{p1}, a_{p2}, a_{p3}, \dots, a_{pn}, \dots\} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Săgețile arată cum putem realiza corespondența biunivocă între mulțimea $\bigcup A_i$ și mulțimea $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

În particular, reuniunea unui număr finit de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă; reuniunea unei mulțimi numărabile de mulțimi finite este numărabilă și se demonstrează la fel ca mai sus.

Mulțimile infinite care au aceeași putere cu mulțimea numerelor naturale se numesc *mulțimi nenumărabile.* Vom arăta la capitolul următor că mulțimea punctelor de pe un segment de dreaptă nu este numărabilă.

5. Relația de ordine

O relație $a \leqslant b$ definită pentru unele perechi ordonate (a, b) de elemente ale unei mulțimi A se numește *relație de ordine* dacă îndeplinește următoarele condiții:

1) $a \leqslant a$ (reflexivă), pentru orice $a \in A$;
2) $a \leqslant b,\ b \leqslant a \Rightarrow a = b$ (antisimetrică);
3) $a \leqslant b,\ b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (tranzitivă);

$$a,\ b,\ c \in A.$$

O mulțime pe care s-a definit o relație de ordine se numește *mulțime ordonată.*

Exemple

1) Mulțimea numerelor naturale este ordonată față de operația $\leqslant$ „mai mic sau egal cu".

2) Relația de incluziune $\subseteq$ este o relație de ordine pentru mulțimea submulțimilor (mulțimea părților) unei mulțimi date E, cum rezultă din proprietățile incluziunii (al. 2).

6. Produs cartezian

Fie A și B două mulțimi distincte sau nu. Să formăm perechile ordonate (a, b), unde $a \in A$, $b \in B$. Mulțimea C a tuturor perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$, $b \in B$ se numește *produsul cartezian* al mulțimii A cu mulțimea B și se notează

$$C = A \times B.$$

Din definiţie rezultă că

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \} .$$

Prin perechi ordonate se înţeleg perechile (a, b) în care primul element a din pereche aparţine *totdeauna* lui A. Se vede că dacă A şi B sînt distincte

$$A \times B \neq B \times A .$$

Dacă $A = B$, atunci $A \times B = B \times A$ şi se scrie A^2, deci

$$A^2 = A \times A = \{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in A \} .$$

În mod analog se poate defini produsul cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ a n mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ca mulţimea tuturor grupelor ordonate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ cu $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$. Mulţimile A_i se numesc factorii produsului cartezian. În particular, dacă

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A ,$$

atunci se scrie

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ factori}} = A^n ,$$

şi conform definiţiei

$$A^n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A,\ a_2 \in A, \ldots, a_n \in A \} .$$

Într-un produs cartezian, rezultatul diferă dacă ordinea factorilor în produs se schimbă, mulţimile A_i fiind considerate distincte.

§ 2. NUMERE REALE

1. Numere naturale. Numere întregi. Numere raţionale

Mulţimea numerelor naturale N este

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ n + 1,\ \ldots$$

Mulţimea N este *ordonată* faţă de relaţia de ordine, „$m < n$" (m mai mic decît n). În loc de $m < n$ se poate scrie de asemenea $n > m$ (n este mai mare decît m). Relaţia „$m < n$" este o relaţie de *ordine totală*, deoarece oricare ar fi numerele întregi m, n avem numai una din posibilităţile

$$m < n \quad \text{sau} \quad m = n \quad \text{sau} \quad m > n .$$

Operaţiile cu numere naturale sînt cunoscute. Astfel, suma a două numere naturale este tot un număr natural

$$a + b = c,\ \ a \in N,\ \ b \in N,\ \ c \in N .$$

Spunem că mulţimea numerelor naturale este *închisă* faţă de operaţia de *adunare*. Dacă se consideră însă ecuaţia

$$a + x = b, \tag{1}$$

se observă că nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale decît dacă $b > a$. Ecuaţia (1) se mai scrie

$$x = b - a,$$

de unde rezultă că *operaţia inversă* adunării, *scăderea*, nu conduce totdeauna la un număr natural. Ecuaţia (1) are totdeauna soluţie într-o mulţime Z ce se obţine reunind la mulţimea N mulţimea N', avînd ca elemente pe zero şi numerele întregi negative

$$N' = \{0, -1, -2, \ldots, -n, -n-1, \ldots\}.$$

Mulţimea $Z = N \cup N' = \{\ldots, -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots \ldots, n, n+1, \ldots\}$ se numeşte *mulţimea numerelor întregi*, ea este total ordonată faţă de operaţia „$<$" şi este închisă faţă de operaţiile de adunare şi scădere.

Mulţimea numerelor naturale N este închisă faţă de operaţia de înmulţire. Aceeaşi proprietate o are şi mulţimea numerelor întregi Z; dacă a şi b sînt două numere întregi oarecare, numărul $a \cdot b$ este un întreg. Ecuaţia

$$ax = b, \qquad (a \neq 0) \tag{2}$$

cu a şi b numere întregi, nu are soluţie în mulţimea numerelor întregi decît dacă b este divizibil cu a. Ecuaţia (2) se mai scrie

$$x = \frac{b}{a}, \qquad (a \neq 0)$$

de unde rezultă că operaţia inversă înmulţirii, *împărţirea*, nu conduce totdeauna la un număr întreg. Mulţimea numerelor întregi reunită cu mulţimea numerelor de forma $\frac{b}{a}$, a, b întregi şi $a \neq 0$ constituie mulţimea numerelor raţionale şi se notează cu Q.

Numărul x^{-1} astfel ca $x \cdot x^{-1} = 1$, $x \neq 0$ se numeşte inversul lui x şi se notează $\frac{1}{x}$. Operaţia de împărţire a două numere $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$ se reduce astfel la operaţia de înmulţire $x \cdot \frac{1}{y} = xy^{-1}$.

Operaţia de împărţire cu numărul 0 nu se poate efectua, deoarece 0 nu are un invers. Spunem că împărţirea cu 0 este o operaţie *lipsită de sens*.

Mulţimea Q a numerelor raţionale are următoarele proprietăţi:

1) este ordonată faţă de relaţia de ordine „$<$";
2) este închisă faţă de operaţiile de adunare şi scădere;
3) este închisă faţă de operaţiile de înmulţire şi împărţire.

Mulţimea Q a numerelor raţionale este *densă*. Iată ce se înţelege prin această noţiune. Dacă $a \neq b$ sînt două numere raţionale, există un număr raţional cuprins între a şi b. În adevăr, dacă $a < b$, atunci avem şi

$$a < \frac{a+b}{2} < b,$$

de unde rezultă imediat că între două numere raţionale oarecare există totdeauna o infinitate de numere raţionale, deoarece

$$a < \frac{am + bn}{m + n} < b,$$

oricare ar fi numerele naturale m şi n. Deşi mulţimea Q are această proprietate *de a fi densă,* totuşi mulţimea Q nu epuizează mulţimea numerelor reale.

2. Numere iraţionale

S-a observat încă din antichitate (secolul V î.e.n.) că operaţia inversă ridicării la putere nu ne conduce totdeauna la un număr raţional. În adevăr, numărul $\sqrt{2}$ nu se poate scrie ca raportul a două numere întregi p şi q, prime între ele, deoarece dacă $\sqrt{2}$ s-ar scrie

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad (\text{sau } p < 0, \ q < 0)$$

ar rezulta şi

$$2q^2 = p^2,$$

deci p^2 trebuie să fie par, prin urmare şi p este număr par: $p = 2m$.

Egalitatea $p^2 = 2q^2$ se scrie

$$4m^2 = 2q^2$$

sau

$$2m^2 = q^2,$$

de unde rezultă că şi q^2 este un număr par, deci şi q este par. Aşadar p şi q au divizor comun pe 2 şi am ajuns astfel la o contradicţie presupunînd că $\sqrt{2}$ este număr raţional.

Spunem că numărul $\sqrt{2}$ este un număr *iraţional.* În calcule un număr iraţional se aproximează prin numere raţionale.

Pentru a găsi un număr raţional cît mai aproape de $\sqrt{2}$ se procedează în modul următor. Se observă mai întîi că

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Dacă se consideră acum şirul

$$1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ \ldots;\ 1{,}9;\ 2,$$

se găseşte că

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5,$$

deoarece $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$; $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$. Procedînd în mod asemănător pentru şirul

$$1{,}40;\ 1{,}41;\ 1{,}42;\ \ldots;\ 1{,}49;\ 1{,}50,$$

se găseşte că

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42.$$

Continuînd operația de un număr oarecare de ori, se obțin două șiruri de numere

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$$
$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots,$$

unde l_n și e_n sînt numere cu n zecimale, cu partea întreagă 1 și cu primele $n-1$ zecimale egale

$$l_n = 1,\ a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n,\ \ e_n = 1,\ a_1 a_2 \ldots \overline{a_n + 1},$$

numite aproximantele prin lipsă (șirul l_n) și exces (șirul e_n) ale numărului $\sqrt{2}$. Șirurile l_n și e_n au următoarele proprietăți:

1) $l_{n+1} \geqslant l_n,\ e_{n+1} \leqslant e_n$, oricare ar fi numărul natural n;
2) $l_n < e_m$, oricare ar fi numerele naturale n și m;
3) $e_n - l_n = \frac{1}{10^n}$ pentru orice n.

Din modul cum au fost construite numerele raționale l_n și e_n, rezultă că

$$l_n < \sqrt{2} < e_n$$

și, prin urmare,

$$\sqrt{2} - l_n < \frac{1}{10^n},\quad e_n - \sqrt{2} < \frac{1}{10^n}, \tag{3}$$

deci diferența dintre termenii șirului de numere raționale l_n (sau e_n) și numărul irațional $\sqrt{2}$ poate fi făcută oricît de mică dorim, dacă se ia numărul n suficient de mare.

Se mai observă că nu putem avea

$$\sqrt{2} = \frac{l_n + e_n}{2},$$

deoarece $\sqrt{2}$ este irațional, iar e_n și l_n sînt numere raționale; prin urmare, numai pentru unul din numerele l_n sau e_n există neegalitatea

$$\sqrt{2} - l_n < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n} \quad \text{sau} \quad e_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}. \tag{4}$$

Numărul l_n (sau e_n) care satisface neegalitatea respectivă (4) se numește *numărul rațional care aproximează numărul irațional $\sqrt{2}$ cu n zecimale exacte.*

Exemplu

$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ Numărul rațional 1,41 aproximează numărul irațional $\sqrt{2}$ cu două zecimale exacte. Numărul rațional 1,4142136 aproximează pe $\sqrt{2}$ cu șapte zecimale exacte.

Să revenim la neegalitățile (3)

$$0 < \sqrt{2} - l_n < \frac{1}{10^n},\quad 0 < e_n - \sqrt{2} < \frac{1}{10^n},$$

cînd $n \to \infty$, $\frac{1}{10^n} \to 0$, deci putem scrie și

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} e_n = \sqrt{2}$$

şi spunem că şirurile (l_n) şi (e_n) au o limită comună care este numărul iraţional $\sqrt{2}$. Faptul că cele două şiruri definesc acelaşi număr apare aici intuitiv. Mai tîrziu, la şiruri, vom reveni asupra noţiunii de limită şi vom demonstra în mod riguros existenţa numărului $\sqrt{2}$, ca limita comună a celor două şiruri (l_n) şi (e_n) care îl aproximează respectiv prin lipsă sau exces.

Tot din modul cum sînt construiţi termenii celor două şiruri (l_n) şi (e_n) rezultă că numărul iraţional $\sqrt{2}$ are o infinitate de zecimale

$$\alpha = a_0,\ a_1\ a_2 \ldots a_n \ldots$$

Exprimarea printr-un număr cu o infinitate de zecimale nu este însă specifică numerelor iraţionale. Orice număr întreg sau fracţionar are această proprietate. Fie n un număr întreg; avem

$$n = \overline{n-1},\ 9999\ldots9\ldots = n-1+9\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\right) = n-1+\frac{9}{9} = n.$$

Un număr raţional, prin împărţire directă, are o infinitate de zecimale sau un număr finit. Dacă are un număr finit de zecimale, are forma

$$\frac{a}{b} = a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_p = a_0,\ a_1 a_2 \ldots \overline{a_p - 1}\ 99\ldots9\ldots,$$

deci şi în această situaţie se scrie cu o infinitate de zecimale.

3. Reprezentarea numerelor pe o axă. Tăieturi. Continuul liniar

Teorema lui Dedekind!

Fie o dreaptă pe care s-a ales o origine O, o unitate şi un sens de parcurs (fig. 5).

În geometria analitică se admite corespondenţa biunivocă între punctele unei drepte şi mulţimea numerelor reale. Am arătat că mulţimea numerelor

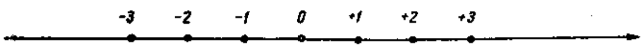


Fig. 5.

raţionale este o mulţime densă. Vom vedea că, deşi posedă această proprietate, mulţimea numerelor raţionale nu acoperă toată dreapta şi că numerele iraţionale au locul lor bine precizat pe dreaptă.

Să considerăm numărul real $\sqrt{2}$. Numărul $\sqrt{2}$ nu este raţional. El împarte însă mulţimea numerelor raţionale în două clase A şi B în modul următor:

Clasa A este formată din toate numerele raţionale negative, precum şi din numerele raţionale pozitive a, astfel încît $a^2 < 2$, iar clasa B este formată din numerele raţionale pozitive b, astfel încît $b^2 > 2$.

Dacă $a \in A$ și $b \in B$, atunci $a < b$. Se spune că în modul acesta s-a făcut o tăietură în mulțimea numerelor raționale Q.

Fie acum numărul rațional $\frac{1}{2}$. Numărul $\frac{1}{2}$ împarte, de asemenea, numerele raționale R în două clase A' și B'. Din clasa A' fac parte toate numerele raționale $a' \leqslant \frac{1}{2}$, iar din clasa B' fac parte toate numerele raționale $b' \geqslant \frac{1}{2}$. Între aceste două tăieturi $\left(\text{tăietura realizată de } \sqrt{2} \text{ și tăietura realizată de } \frac{1}{2}\right)$ există o diferență esențială, și anume: între mulțimile A și B nu există un element de separație, adică nu există nici un număr (rațional) din mulțimea A mai mare decît orice număr din A și nu există, de asemenea, nici un număr (rațional) din mulțimea B mai mic decît orice număr din B, pe cînd în cazul al doilea, există un element de separație, și anume numărul $\frac{1}{2}$, deoarece $a' \leqslant \frac{1}{2}$ și $b' \geqslant \frac{1}{2}$.

Am spus că nu există un număr rațional r ($r^2 < 2$) mai mare decît orice număr din A. Vom demonstra prin reducere la absurd. Să presupunem că acest număr r există; se observă că $r > 1$. Vom arăta că putem construi un număr rațional $r' > r$ și $r'^2 < 2$.

Deoarece $r^2 < 2$, punem $2 - r^2 = s > 0$; numărul s este rațional, fiind diferența a două numere raționale.

Numărul $r' = r + \frac{s}{4} > r$ este rațional deoarece r și s sînt raționali.

Să arătăm că $r'^2 < 2$. Avem

$$r'^2 = r^2 + \frac{sr}{2} + \frac{s^2}{16} < r^2 + \frac{sr^2}{2} + \frac{s^2}{16} = r^2\left(1 + \frac{s}{2}\right) + \frac{s^2}{16};$$

neegalitatea este justificată de faptul că $r^2 > r$, deoarece $r > 1$.

În continuare

$$r'^2 < (2 - s)\left(1 + \frac{s}{2}\right) + \frac{s^2}{16} = 2 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{16} = 2 - \frac{7}{16}s^2 < 2,$$

deci $r' \in A$. Am arătat în acest mod că nu există un astfel de număr r.

Să arătăm acum că nu există un număr rațional ρ, $\rho^2 > 2$, mai mic decît orice număr din B. Să presupunem că acest număr ρ există. Numărul rațional

$$\rho' = \frac{\rho + \frac{2}{\rho}}{2}$$

are proprietățile

$$\rho'^2 > 2 \quad (1)$$

și

$$\rho' < \rho. \quad (2)$$

În adevăr

$$\rho'^2 = \frac{\rho^2 + 4 + \frac{4}{\rho^2}}{4} > 2,$$

deoarece

$$\rho^2 + 4 + \frac{4}{\rho^2} > 8$$

$$\rho^2 + \frac{4}{\rho^2} - 4 > 0$$

$$\left(\rho - \frac{2}{\rho}\right)^2 > 0,$$

deci $\rho' < B$. În ceea ce privește proprietatea (2) se observă că

$$\rho' < \frac{\rho^2 + \frac{\rho^2}{\rho}}{2} = \rho,$$

neegalitatea fiind justificată de faptul că $\rho^2 > 2$.

Am arătat în acest mod că un astfel de număr ρ nu există.

Să presupunem acum că parcurgem axa reală și că tuturor punctelor de pe axă le-ar corespunde numai numere raționale. Trecînd de la punctele mulțimii A la punctele mulțimii B, deoarece nu există element de separație între aceste două mulțimi, punctului corespunzător de pe axă care separă cele două mulțimi îi facem să corespundă numărul irațional $\sqrt{2}$, care își găsește astfel un loc bine determinat.

Reuniunea numerelor raționale Q și iraționale P formează mulțimea numerelor reale R. Dacă se face o tăietură în această mulțime, există totdeauna un element de separație aparținînd lui R.

Din această cauză spunem că mulțimea numerelor reale R este și continuă.

Numerele reale se împart în *numere algebrice*: $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt{3} + \sqrt{7}$, și *numere transcendente*: π, e, $2^{\sqrt{2}}$ etc.

Numerele reale algebrice sînt numere care pot fi soluții ale unei ecuații algebrice, adică ale unei ecuații de forma

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

unde n este un număr natural, iar coeficienții a_k sînt numere întregi. Mulțimea numerelor algebrice conține ca submulțime mulțimea numerelor raționale, deoarece orice număr rațional $\frac{p}{q}$ este soluția ecuației $qx = p$, $q \neq 0$.

Numerele reale transcendente nu sînt soluțiile unei ecuații algebrice.

A. O. Ghelfond a arătat, în anul 1934, că numerele de forma α^β cu $\alpha \neq 1$ și β un număr algebric irațional sînt numere transcendente.

S-a demonstrat că numerele π și e sînt transcendente.

Corespondența biunivocă dintre numerele reale și punctele unei drepte ne permite să folosim noțiunea de punct pentru noțiunea de număr și reciproc. Numărul x care corespunde unui punct P se numește *abscisa* lui P. Corespondența stabilită păstrează *ordinea*, anume dacă x și y sînt abscisele a două puncte A și B, iar $x < y$, atunci A este la stînga lui B.

4. Intervale

Datorită acestei corespondențe, mulțimilor de numere le corespund mulțimi de puncte. Dăm mai jos cîteva noțiuni care vor fi folosite adesea de-a lungul expunerii.

Fie a, b două numere reale, $a < b$.

1) Se numește *interval deschis* mulțimea punctelor x care verifică dubla inegalitate $a < x < b$ și se notează (a, b) (fig. 6)

$$(a, b) = \{x \mid x \in R,\ a < x < b\}.$$

2) Se numește *interval închis* sau segment mulțimea punctelor x care verifică dubla inegalitate $a \leqslant x \leqslant b$ și se notează $[a, b]$ (fig. 9).

$$[a, b] = \{x \mid x \in R,\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$


(a, b)

Fig. 6


$[a, b)$

Fig. 7


$(a, b]$

Fig. 8

3) Se numește *interval închis la dreapta și deschis la stînga* mulțimea punctelor x care verifică inegalitățile $a < x \leqslant b$ și se notează $(a, b]$ (fig. 8)

$$(a, b] = \{x \mid x \in R,\ a < x \leqslant b\}.$$

4) Se numește *interval închis la stînga și deschis la dreapta* mulțimea punctelor x care verifică inegalitățile $a \leqslant x < b$ și se notează $[a, b)$ (fig. 7)

$$[a, b) = \{x \mid x \in R,\ a \leqslant x < b\}.$$

5) Se numește *semidreaptă deschisă și nemărginită la dreapta* (fig. 10) și se notează $(a, +\infty)$ mulțimea

$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in R,\ x > a\}.$$

Semidreapta închisă și nemărginită la dreapta (fig. 11) conține și punctul a, punct care se numește extremitatea semidreptei.

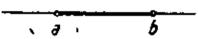

$[a, b]$

Fig. 9

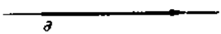

$(a, +\infty)$

Fig. 10


$[a, +\infty)$

Fig. 11

6) Se numește *semidreaptă deschisă și nemărginită la stînga* (fig. 12) și se notează $(-\infty, a)$ mulțimea

$$(-\infty,\ a) = \{x \mid x \in R,\ x < a\}.$$

Semidreapta închisă și nemărginită la stînga (fig. 13) conține și punctul a. Dreapta întreagă R se notează $(-\infty, +\infty)$.
Să considerăm acum o pereche ordonată de numere reale (x, y).

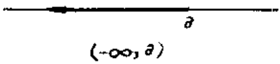


Fig. 12

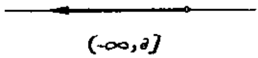


Fig. 13

Pe două drepte perpendiculare în plan Ox și Oy să alegem aceeași origine O (punctul de intersecție al celor două drepte), aceeași unitate și cîte un sens de parcurs (fig. 14).

Perechii de numere (x, y) i se asociază un punct P din plan și invers. Numerele x, y se numesc coordonatele punctului P; x se numește abscisa, y se numește ordonata punctului P.

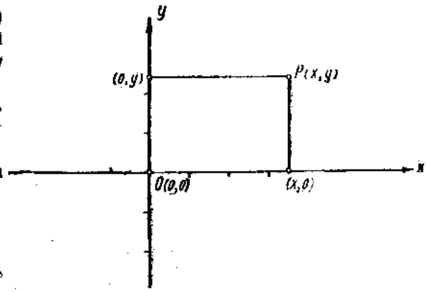


Fig. 14

Mulțimea punctelor din plan definită de

$$a < x < b,\quad c < y < d$$

se numește interval deschis (fig. 15)

$$I = \{(x, y) \mid x \in (a, b),\ y \in (c, d)\}.$$

Intervalul I este produsul cartezian al intervalelor (a, b) și (c, d) și este format din mulțimea punctelor (x, y) interioare dreptunghiului $ABCD$.

În mod asemănător, mulțimea perechilor de puncte (x, y)

$$a \leqslant x \leqslant b,\quad c \leqslant y \leqslant d$$

definește un interval închis și este formată din punctele interioare și de pe laturile dreptunghiului $ABCD$ (fig. 15).

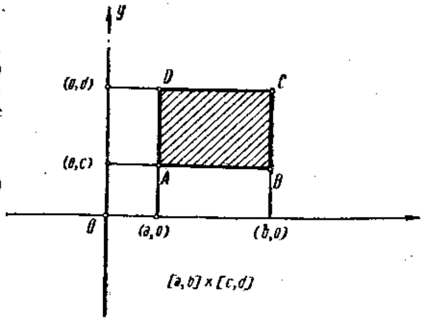


Fig. 15

În general, fie n intervale pe o dreaptă, $I_1, I_2, \ldots, I_n$

$$I_1 = \{x_1 \mid x_1 \in R, a_1 < x_1 < b_1\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_n = \{x_n \mid x_n \in R,\ a_n < x_n < b_n\}.$$

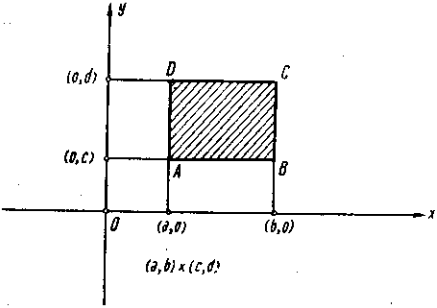


Fig. 16

Produsul lor cartezian $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ se numeşte interval n-dimensional

$$I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\}.$$

Mulţimea grupelor ordonate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu $x_1 \in R$, $x_2 \in R, \ldots, x_n \in R$ formează spaţiul cu n dimensiuni R^n; prin urmare

$$R^n = R \times R \times \ldots \times R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in R, x_2 \in R, \ldots, x_n \in R\}.$$

5. Valoare absolută sau modul

Se numeşte *modul* sau *valoare absolută* a unui număr real a numărul $|a|$ definit astfel

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a > 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0 \\ 0, \text{ dacă } a = 0 \end{cases}$$

deci $|a| \geqslant 0$. Modulul are următoarele proprietăţi:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad (1)$$
$$|a \pm b| \leqslant |a| + |b| \quad (2)$$
$$|a \pm b| \geqslant ||a| - |b|| \quad (3)$$

Demonstrație. Proprietatea 1 rezultă imediat din definiție. În ceea ce privește proprietatea 2, observăm că suma $a \pm b$ este cel mult egală cu $|a| + |b|$, egalitatea (2) avînd loc cînd a și b au același semn.

În ceea ce privește inegalitatea (3), putem scrie

$$|a| = |a \pm b \mp b| \leqslant |a \pm b| + |b|,$$

deci

$$|a| - |b| \leqslant |a \pm b|. \tag{4}$$

În mod analog arătăm și

$$|b| - |a| \leqslant |a \pm b|. \tag{5}$$

Inegalitățile (4) și (5) se scriu condensat sub forma (3).

Din (2) obținem

$$|a + b + c| \leqslant |a| + |b + c| \leqslant |a| + |b| + |c|$$

și în general

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|, \tag{6}$$

egalitatea avînd loc cînd toate numerele a_i au același semn.

Inegalitatea (6) se enunță în modul următor: modulul sumei mai multor numere reale este mai mic sau cel mult egal cu suma modulelor numerelor respective.

6. Operații cu numere reale

În mulțimea numerelor reale se pot efectua două operații: adunarea și înmulțirea. Operația de adunare face să corespundă la două numere a, b numărul real $a + b$, care se numește *suma* lui a cu b.

Operația de adunare are următoarele proprietăți:

1) Este comutativă

$$a + b = b + a.$$

2) Este asociativă

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.$$

3) Există un element neutru, numărul zero, astfel încît

$$0 + a = a.$$

4) Fiecărui număr a i se asociază *opusul* său $-a$, cu proprietatea

$$a + (-a) = 0.$$

Operația de înmulțire face să corespundă la două numere reale a, b un număr real $a \cdot b$ sau ab, numit produsul lui a cu b.

Operația de înmulțire are următoarele proprietăți:

1) Este comutativă

$$ab = ba.$$

2) Este asociativă

$$(ab)\,c = a\,(bc) = abc.$$

3) Există un element neutru, numărul 1, astfel încît

$$1 \cdot a = a.$$

4) Pentru fiecare număr $a \neq 0$ există numărul $a^{-1} = \frac{1}{a}$, numit inversul său, cu proprietatea

$$a \cdot \frac{1}{a} = aa^{-1} = 1.$$

5) Operația de înmulțire este distributivă față de adunare

$$(a + b)\,c = ac + bc.$$

7. Structura de ordine

Pe mulțimea numerelor reale R se definește o relație de ordine „$a < b$" sau „$b < a$" și se citește „a mai mic decît b" sau „b mai mare decît a". Relația „$a < b$" este o relație *de ordine totală.*

Dacă x nu este mai mic decît y se notează $x \nless y$ sau $y \ngtr x$.

Relația de ordine are următoarele proprietăți:

1) $x \nless x, \quad x \in R$ (este ireflexivă);

2) $x < y \Rightarrow y > x$;

3) $x < y, \quad y < z \Rightarrow x < z$ (este tranzitivă);

4) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$;

5) $x > y, \quad z > 0 \Rightarrow xz < yz$;

6) $x < y, \quad z < 0 \Rightarrow xz < yz$;

7) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Numerele $x > 0$ se numesc numere strict pozitive. Numerele $x \geqslant 0$ se numesc numere pozitive. Numerele $x < 0$ se numesc strict negative. Numerele $x \leqslant 0$ se numesc numere negative.

Numărul 0 este deci şi negativ, şi pozitiv; este singurul număr care are această proprietate. Inegalitatea

$$|x-a|<\varepsilon, \quad \varepsilon>0,$$

este echivalentă cu $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ şi defineşte un interval deschis de lungimea 2ε, cu centrul în punctul a.

8. Puteri naturale. Puteri întregi

Dacă a este un număr real şi n un număr natural, se scrie

$$a^1=a;\ a^2=a\cdot a;\ldots;\ a^n=\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n\text{ factori}}$$

Numărul a^n se numeşte *putere*, a este *baza puterii* şi n *exponentul puterii*.

Din definiţie rezultă

$$1^n=1;\quad 0^n=0.$$

Puterile cu exponent natural se numesc *puteri naturale* şi au următoarele proprietăţi:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$;

2) $(a^m)^n = a^{mn}$;

3) $(ab)^n = a^n b^n$;

4) $a^n>1$, dacă $a>1$;

5) $a^n<b^n$, dacă $0\leqslant a<b$;

6) $a^n>a^m$, dacă $a>1$, $n>m$.

Pentru $a\neq 0$ se defineşte, oricare ar fi n natural,

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a^0=1.$$

Puterile a^p cu p întreg se numesc *puteri întregi* şi au proprietăţile 1, 2, 3, la care trebuie să adăugăm

4') $a^p>1,\quad a>1,\quad p>0;$

$a^p<1,\quad a>1,\quad p<0.$

Puterile lui 0 cu exponent negativ nu se definesc; spunem că 0^0 şi 0^{-n} nu au sens.

9. Puteri raționale

Vom arăta mai tîrziu că ecuația $x^n = a$, $a \geqslant 0$, real, n natural, are o soluție pozitivă și numai una. Soluția pozitivă unică a ecuației $x^n = a$ se notează cu $\sqrt[n]{a}$ sau $a^{\frac{1}{n}}$. Avem de asemenea

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

Puterile cu exponent rațional a^r, a real, r rațional ($a > 0$ dacă $r < 0$), se numesc *puteri raționale* și au următoarele proprietăți care rezultă din definiția lor:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $\quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;

2) $(a^p)^q = a^{pq}$;

3) $(ab)^p = a^p b^p$, $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} = a^p \cdot b^{-p}$;

4) dacă $a > 1$, $\quad p > 0$, $\quad a^p > 1$,

$a^0 = 1$, $\quad 1^p = 1$, $\quad 0^p$ cu $p \leqslant 0$ nu are sens;

5) dacă $r < s$, atunci $a^r < a^s$ pentru $a > 1$ și $a^r > a^s$ pentru $0 < a < 1$;

6) dacă $0 < a < b$, atunci $a^r < b^r$ pentru $r > 0$ și $a^r > b^r$ pentru $r < 0$.

Puterile a^α cu α real le vom defini la B., cap. I, § 6.

10. Două teoreme privind puterea numerelor reale

În încheiere să demonstrăm două teoreme privind numerele reale.

Teorema 1. Mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

Demonstrație. Fie $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ o ecuație de grad n (natural) cu coeficienții a_k întregi, $a_0 \neq 0$.

Numim *înălțimea* polinomului $P_n(x)$ numărul natural h definit de

$$h = n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

La o înălțime dată corespunde un număr finit de polinoame. Astfel, pentru $h = 2$ avem polinomul x, pentru $h = 3$, polinoamele x^2, $x \pm 1$, pentru $h = 4$, polinoamele $x \pm 2$, $2x \pm 1$, $x^2 \pm 1$, x^3. Este evident că la orice număr natural h corespunde un număr finit de polinoame; în consecință, la orice număr natural h corespunde un număr finit de numere algebrice, și anume rădăcinile distincte ale ecuațiilor corespunzătoare ce provin din anularea polinoamelor de înălțime h. Reuniunea unei mulțimi numărabile de mulțimi finite fiind numărabilă, urmează că mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

C o r o l a r. Mulțimea numerelor raționale este numărabilă.

Numerele raționale $\frac{p}{q}$ sînt soluțiile ecuațiilor de forma $qx - p = 0$, deci sînt o submulțime a numerelor algebrice; mulțimea numerelor raționale este deci numărabilă.

T e o r e m a 2. Mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că mulțimea numerelor reale cuprinse între 0 și 1 nu este numărabilă.

Să presupunem că mulțimea numerelor reale cuprinse între 0 și 1 s-ar scrie ca un șir $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$

$$r_1 = 0, a_{11} \quad a_{12} \ldots a_{1n} \ldots$$

$$r_2 = 0, a_{21} \quad a_{22} \ldots a_{2n} \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_p = 0, a_{p1} \quad a_{p2} \ldots a_{pn} \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

unde $0 \leqslant a_{i_j} \leqslant 9$. Să formăm acum numărul

$$r = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \ldots$$

cu zecimala a_k diferită de a_{kk}, de 9 și de zero.

Numărul r este cuprins între 0 și 1 și nu coincide cu nici unul din numerele r_k, deoarece diferă de fiecare printr-o cifră zecimală. În consecință, ipoteza că putem așeza mulțimea numerelor reale într-un șir ne duce la contradicție, deci mulțimea numerelor reale nu este numărabilă. Se deduce de aici că și mulțimea numerelor iraționale este nenumărabilă, deoarece reuniunea sa cu cea rațională, care este numărabilă, este nenumărabilă.

Spunem că mulțimea numerelor reale este de puterea *continuului*.

§ 3. ELEMENTE DE ALGEBRĂ MODERNĂ

1. Operații între elementele unei mulțimi. Element neutru. Invers

Fie A o mulțime nevidă. Spunem că în mulțimea A este definită o *operație* dacă este definită o regulă datorită căreia la fiecare pereche ordonată (a, b), $a \in A$, $b \in A$, corespunde un element $c \in A$. Dacă notăm această operație cu $*$, avem

$$a * b = c, \quad a \in A,\ b \in A,\ c \in A.$$

Exemple

1) Operația + (adunare) în mulțimea numerelor reale asociază la perechea (a, b) numărul real $a + b$.

2) Operația $\times$ (înmulțire) asociază la perechea (a, b) numărul real $a \times b$.

Operația $*$ este *comutativă* dacă

$$a * b = b * a$$

pentru orice $a \in A$ și $b \in A$.

Operația $*$ este asociativă dacă

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

pentru orice $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$.

Exemple

1) Adunarea numerelor reale este asociativă și comutativă.

2) Înmulțirea numerelor reale este asociativă și comutativă

3) Dacă $\vec{v}$ este mulțimea vectorilor liberi din spațiu, operația „$\times$", numită *produs vectorial*, nu este nici comutativă, nici asociativă, deoarece

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{și} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

Fie acum o mulțime A în care este definită o operație $*$

$$a * x = y, \qquad a, x, y \in A.$$

Să presupunem că x parcurge toată mulțimea A; atunci y parcurge pe A sau o parte din A.

Exemple

1) Dacă, în ecuația $a + x = y$, a și x sînt numere naturale, atunci y ia valorile $a + 1$, $a + 2, \ldots$, deci y parcurge o parte a mulțimii N.

2) Dacă, în ecuația $a + x = y$, a și x sînt numere întregi, cînd x parcurge mulțimea numerelor întregi Z, y de asemenea parcurge toată mulțimea Z.

Operația $*$ se poate *inversa la dreapta* în mulțimea A dacă oricare ar fi $y \in A$ există un element $x \in A$ astfel încît să avem

$$a * x = y$$

pentru orice a fix din A.

Operația $*$ se poate *inversa la stînga* în mulțimea A dacă oricare ar fi $z \in A$ există un element $x \in A$ astfel încît să avem

$$x * a = z$$

pentru orice a fix din A.

Despre o operație care se poate inversa la dreapta și la stînga spunem că *se poate inversa*.

Exemple

1) Operația + (adunare) în mulțimea numerelor întregi se poate inversa.

2) Operația $\times$ (înmulțire) în mulțimea numerelor raționale fără numărul zero se poate inversa.

3) Operația $\times$ (înmulțire) în mulțimea numerelor reale fără numărul zero se poate inversa.

Fie A o mulţime nevidă, în care s-a definit o operaţie $*$.

Elementul $e \in A$ pentru care

$$a * e = a$$

oricare ar fi $a \in A$ se numeşte *element neutru* faţă de operaţia $*$. Se poate arăta că, dacă într-o mulţime A operaţia $*$ este 1) asociativă şi 2) se poate inversa, elementul neutru e este unic.

Se numeşte *inversul lui* a faţă de operaţia $*$ soluţia ecuaţiei

$$a * x = e.$$

Să arătăm că dacă operaţia $*$ îndeplineşte condiţiile amintite (este asociativă şi se poate inversa) elementul invers este unic. Să considerăm şi ecuaţia

$$y * a = e.$$

Trebuie să dovedim că $x = y$; avem

$$y * (a * x) = y * e$$

sau, ţinînd seama de asociativitatea operaţiei $*$,

$$(y * a) * x = e * x,$$

deci

$$y * e = e * x.$$

Însă elementul neutru este unic, deci $e * x = x * e$ şi

$$x * e = y * e \Rightarrow x = y.$$

Se notează de obicei a^{-1} inversul lui a.

Exemple

1) În mulţimea numerelor naturale, faţă de operaţia de adunare, elementul neutru este numărul 0, iar inversul unui număr real a este $-a$ şi se numeşte *opusul* lui a.

2) În mulţimea numerelor raţionale, faţă de operaţia de înmulţire, elementul neutru este numărul 1, iar inversul unui număr $a \neq 0$ este $\frac{1}{a}$.

2. Grup. Semigrup

Fie G o mulţime nevidă, iar $*$ o operaţie definită în G. Mulţimea G se numeşte *grup* (sau are *structură de grup*) dacă operaţia $*$ are următoarele două proprietăţi:

1) este asociativă;
2) se poate inversa.

Din definiţie rezultă că orice grup are un element neutru şi orice element al grupului are un invers.

Grupul se numește *abelian* dacă operația $*$ este și comutativă.

Dacă operația $*$ îndeplinește numai condiția 1, mulțimea G se numește *semigrup*.

Exemple

1) Mulțimea numerelor naturale formează semigrup față de operația de adunare.

2) Mulțimea numerelor întregi formează grup abelian față de operația de adunare.

3) Mulțimea numerelor întregi formează semigrup abelian față de operația de înmulțire.

4) Mulțimea numerelor raționale fără numărul zero formează grup față de operația de înmulțire.

5) Mulțimea transformărilor

$$z = \frac{z' a + b}{z' c + d}$$

cu $ad - bc \neq 0$ formează grup față de operația de compunere a lor.

Într-adevăr, pentru $z' = \dfrac{mz'' + n}{pz'' + q}$, avem

$$z = \frac{a(mz'' + n) + b(pz'' + q)}{c(mz'' + n) + d(pz'' + q)} = \frac{z''(am + bp) + an + bq}{z''(mc + dp) + cn + dq}.$$

Transformarea inversă este dată de

$$z^{-1} = \frac{-zd + b}{zc - a}$$

și compusă cu z dă $z = z$, adică transformarea identică; transformarea $z = z$ este elementul neutru al grupului. Trebuie îndeplinită condiția $ad - bc \neq 0$ pentru ca transformarea să nu se reducă la $z = k$.

Un grup (sau semigrup) pentru care fiecare din relațiile

$$a * x = a * x' \text{ sau } x * a = x' * a$$

atrage $x = x'$ se numește grup sau (semigrup) *integral*.

Exemplu

Mulțimea numerelor raționale formează semigrup integral față de operația înmulțire.

Se numește subgrup al unui grup G orice submulțime G' a lui G care are structură de grup față de operația $*$ din G.

Exemple

1) Mulțimea numerelor întregi formează grup față de operația adunare (numărul zero este considerat par) și este un subgrup al grupului numerelor întregi Z.

2) Mulțimea numerelor impare nu formează un subgrup al mulțimii numerelor întregi.

3) Mulțimea

$$A = \{ x \mid x = 3m, \quad m \in Z \}$$

formează grup față de operația de adunare și este un subgrup al lui Z.

3. Inel. Corp

Se numește *inel* o mulțime nevidă $\mathcal{J}$ de elemente în care sînt definite două operații $+$ (adunarea) și $\times$ (înmulțirea) care satisfac următoarele axiome:

S_1. Dacă a și b sînt două elemente oarecare ale mulțimii $\mathcal{J}$,

$$a + b \in \mathcal{J}.$$

S_2. Operația $+$ este comutativă

$$a + b = b + a.$$

S_3. Operația $+$ este asociativă

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

S_4. Există un element neutru, elementul 0 (zero) $\in \mathcal{J}$, astfel încît pentru orice $a \in \mathcal{J}$

$$0 + a = a.$$

S_5. Orice element a are un invers $-a \in \mathcal{J}$, astfel încît

$$a + (-a) = 0.$$

T_1. Dacă a și b sînt două elemente ale mulțimii, atunci

$$a \times b \in \mathcal{J}.$$

T_2. Operația $\times$ este comutativă

$$a \times b = b \times a.$$

T_3. Operația $\times$ este asociativă

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

T_4. Față de operația $\times$ există un element neutru, elementul 1 (unu) $\in \mathcal{J}$ încît pentru orice $a \in \mathcal{J}$

$$1 \times a = a.$$

T_5. Operația $\times$ este distributivă față de operația $+$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

Aceste axiome pot fi sintetizate, ținînd seamă de definițiile grupului și semigrupului, în modul următor:

O mulțime nevidă de elemente $\mathcal{J}$ are structură de inel dacă în $\mathcal{J}$ sînt definite două operații $+$ și $\times$ astfel încît:

1) Mulțimea $\mathcal{J}$ are structură de grup abelian în raport cu operația $+$.

2) Mulțimea $\mathcal{J}$ are structură de semigrup în raport cu operația $\times$.

3) Operația $\times$ este distributivă în raport cu operația $+$.

Dacă în $\mathcal{J}$ operația $\times$ nu este comutativă, adică condiția T_2 nu are loc, inelul se numește *necomutativ.*

Proprietățile adunării „$+$" și înmulțirii „$\times$" ne permit să efectuăm cu elementele unui inel toate calculele pe care sîntem obișnuiți să le facem cu mulțimea numerelor întregi : adunare, scădere, înmulțire. Putem suprima parantezele, cînd avem de-a face cu un produs, putem schimba ordinea termenilor într-o sumă sau produs în baza operațiilor comutative, asociative și distribuitive enunțate.

Este de observat că într-un inel nu se poate face operația inversă înmulțirii.

Exemple

1) Mulțimea numerelor întregi formează inel față de operațiile adunare și înmulțire.

2) Mulțimea numerelor $a + \sqrt{2}\,b$, a, b întregi formează inel față de operațiile de adunare și înmulțire.

3) Mulțimea polinoamelor de o variabilă, cu coeficienții întregi, formează inel față de operațiile de adunare și înmulțire.

O mulțime K cu structură de inel comutativ față de operațiile $+$ și $\times$ în care orice element $a \in K$, $a \neq 0$ are un invers $a^{-1} \in K$ față de operația $\times$ se numește *corp* (comutativ).

Deci pentru un corp K comutativ avem șirul de axiome $S_1, \ldots, S_5$, $T_1, \ldots, T_5$, completat cu :

T_6. Oricare ar fi $a \in K$, $a \neq 0$, există $a^{-1} \in K$ încît

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1.$$

Exemple

1) Mulțimea numerelor raționale Q formează un corp față de operațiile de adunare și înmulțire.

2) Mulțimea numerelor reale R formează corp față de operațiile de adunare și înmulțire.

3) Mulțimea numerelor $a + \sqrt{2}\,b$, cu a, b raționali, formează un corp față de operațiile de adunare și înmulțire.

4) Mulțimea funcțiilor raționale $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ și $Q(x)$ polinoame, $Q(x) \not\equiv 0$, formează un corp.

O submulțime I' a unui inel I, care are structura de inel (față de operațiile $+$, $\times$), se numește *subinel.*

O submulțime K' a unui corp K, care are structură de corp (față de operațiile $+$, $\times$), se numește *subcorp.*

Exemple

1) Mulțimea numerelor raționale este un subcorp al corpului numerelor reale.

2) Mulțimea $a + \sqrt{2}\,b$, a, b raționali, este un subcorp al numerelor reale.

3) Mulțimea numerelor întregi și pare este un subinel al mulțimii numerelor întregi Z.

§ 4. NUMERE COMPLEXE

1. Definiţie. Corpul numerelor complexe

Operaţia inversă ridicării la putere a unui număr real nu este închisă în mulţimea numerelor reale. În adevăr, nu există nici un număr real α pozitiv sau negativ astfel încît să avem

$$\alpha = \sqrt{-1},$$

deoarece pătratul unui număr real nu poate fi negativ. De asemenea, rezolvarea ecuaţiilor de gradul doi

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$$

conduce la soluţii de forma $x = a \pm b\sqrt{-1}$.

Vom numi *numere complexe* perechile ordonate de numere reale a, b, pe care le vom nota provizoriu cu (a, b), perechi supuse la următoarele reguli de calcul:

1) $(a, b) = (a', b')$ dacă şi numai dacă $a = a'$, $b = b'$;
2) $(1,0) = 1$, $(0,1) = i$;
3) $k(a, b) = (a, b)\,k = (ka, kb)$, $k \in R$;
4) $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$, (adunarea);
5) $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$, (înmulţirea).

Din 2 şi 3 rezultă

$$k(1,0) = (k, 0) = k,$$

deci

$$(0,0) = 0,$$

şi ţinînd seama de 1 urmează că $(a, b) = 0$ numai dacă

$$a = 0, \quad b = 0.$$

Din 3 şi 4 rezultă că orice număr complex (a, b) se scrie

$$(a, b) = a\,(1,0) + b\,(0,1)$$

şi dacă ţinem seama şi de regula 5

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0)$$

deducem că un număr complex (a, b) se scrie

$$(a, b) = a + ib.$$

Dacă efectuăm acum produsul $(a + ib)(a' + ib')$ după regulile obișnuite ale algebrei și ținînd seama că $i^2 + 1 = 0$, obținem

$$(a + ib)(a' + b'i) = aa' - bb' + i(ab' + a'b),$$

adică tocmai regula 5.

Mulțimea numerelor complexe $a + ib$ formează un corp C față de operația + (adunare) și operația $\cdot$ (înmulțire).

S_1. $$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d) \in C,$$

suma a două numere complexe este tot un număr complex.

S_2. Operația + este comutativă

$$(a + ib) + (c + id) = (c + id) + (a + ib) = (a + c) + (b + d)i.$$

S_3. Operația + este asociativă

$$((a + ib) + (c + id)) + (e + if) = a + ib + ((c + id) + (e + if)) =$$
$$= a + c + e + i(b + d + f).$$

S_4. Elementul neutru față de operația + este numărul $0 + i0$, deoarece

$$a + ib + (0 + i \cdot 0) = a + ib.$$

S_5. Există un număr complex $x + iy$ și unul singur, astfel încît

$$(a + ib) + (x + iy) = 0 + i \cdot 0,$$

$a + ib$ fiind un număr complex oarecare. Trebuie să avem

$$a + x = 0, \qquad b + y = 0,$$

deci

$$x = -a, \qquad y = -b,$$

și numărul căutat, numit *opusul* lui $a + ib$, este $-a - ib$.

O consecință a acestui fapt este că ecuația următoare

$$(a + ib) + (x + iy) = c + id$$

are o soluție unică dată de

$$x = c - a, \qquad y = d - b.$$

Numerele complexe formează deci grup abelian față de adunare.

Să arătăm acum că numerele complexe fără elementul zero $0 + i \cdot 0$ formează grup abelian față de operația de înmulțire.

T_1. $(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc) \in C$,

produsul a două numere complexe este un număr complex.

T_2. Înmulțirea este comutativă

$$(a + ib)(c + id) = (c + id)(a + ib) = ac - bd + i(ad + bc).$$

T_3. Înmulţirea este asociativă

$$(a + ib)\,[(c + id)\,(e + if)] = [(a + ib)\,(c + id)]\,(e + if) =$$
$$= ace - adf - bcf - bde + i\,(acf + ade + bce - bdf).$$

T_4. Elementul neutru este numărul $1 + i \cdot 0$, deoarece

$$(a + ib)\,(1 + i \cdot 0) = a + ib.$$

T_5. Înmulţirea este distributivă faţă de adunare

$$(a + ib)\,[(c + id) + (e + if)] = (a + ib)\,(c + id) + (a + ib)\,(e + if) =$$
$$= (ac + ae - bd - bf) + i\,(ad + bc + af + be) = [(c + id) + (e + if)]\,(a + ib).$$

T_6. Orice număr complex $z = a + ib \neq 0 + i \cdot 0$ are un invers.

Ecuaţia

$$(x + iy)\,(a + ib) = 1 + i \cdot 0$$

conduce la sistemul

$$xa - yb = 1$$
$$xb + ya = 0,$$

cu soluţia, dacă $a^2 + b^2 \neq 0$,

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2},$$

deci

$$z^{-1} = (a + ib)^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

şi există dacă $a^2 + b^2 \neq 0$, anume dacă $z \neq 0 + i \cdot 0$.

Din T_6 avem şi

$$\frac{a + ib}{c + id} = (a + ib)\,\frac{1}{c + id} = \frac{(a + ib)\,(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + i\,(bc - ad)}{c^2 + d^2},$$

dacă $c^2 + d^2 \neq 0$. Împărţirea a două numere complexe se reduce astfel la înmulţire. Împărţirea cu zero nu este definită. Spunem că nu are sens.

Din cele de mai sus rezultă că înmulţirea numerelor complexe formează un corp numit *corpul numerelor complexe C*. Corpul numerelor reale *R* este un subcorp al numerelor complexe *C*, deoarece numerele reale se pot scrie: $a + i \cdot 0$, $a \in R$.

2. Numere conjugate. Modul. Argument

Să căutăm numărul complex $x + iy$ care înmulţit cu $a + ib$ să dea un număr real

$$(x + iy)\,(a + ib) = xa - yb + i\,(xb + ya),$$

deci

$$xb + ya = 0, \qquad x = ka, \qquad y = -kb,$$

şi soluţia căutată este

$$x + iy = k(a - ib).$$

Există deci o infinitate de numere complexe care îndeplinesc condiţia cerută

$$k(a - ib)(a + ib) = k(a^2 + b^2).$$

Pentru $k = 1$ obţinem numărul $a - ib$, numit *conjugatul* lui $a + ib$. Produsul $(a + ib)(a - ib)$ nu este numai real, ci şi pozitiv. Dacă notăm

$$z = a + ib,$$

conjugatul său se notează

$$\bar{z} = a - ib.$$

Avem deci

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

Numărul real şi pozitiv $\sqrt{a^2 + b^2}$ se numeşte *modulul* lui z, şi se notează

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Din expresia inversului unui număr complex rezultă

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{a}{a^2 + b^2} + i\,\frac{-b}{a^2 + b^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z \neq 0,$$

deci *modulul inversului unui număr complex $z \neq 0$ este egal cu inversul modulului numărului z.* Din

$$|z \cdot z'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

urmează

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|,$$

adică *modulul produsului a două numere este egal cu produsul modulelor.*

3. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe. Forma trigonometrică a unui număr complex

Să considerăm planul complex, adică un plan în care s-a luat un sistem de axe rectangulare Ox, Oy; numim axa Ox axă reală, iar axa Oy axă imaginară. Pe axa Ox punctele de diviziune corespunzătoare unei unităţi sînt ... -2, -1, 0, 1, 2, ..., iar pe axa imaginară punctele de diviziune corespunzătoare aceleiaşi unităţi sînt $-2i$, $-i$, 0, i, $2i$, ... (fig. 17).

Numărului complex $z = a + ib$ îi corespunde un punct M de coordonate (a, b) şi invers, unui punct din plan îi corespunde un număr complex şi numai

unul singur. Mai putem spune că punctului z îi corespunde vectorul $\overrightarrow{OM}$. Originii axelor îi corespunde numărul $z = 0 + i0$. Aplicînd formulele cunoscute din trigonometrie, avem (fig. 17)

$$a = OM \cdot \cos\theta, \qquad b = OM \cdot \sin\theta, \qquad (1)$$

deci

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib| = r.$$

Lungimea segmentului OM este, aşadar, modulul numărului complex $a + ib$.

Unghiul θ pe care îl face OM cu direcţia pozitivă a axei Ox se numeşte *argumentul numărului complex* $a + ib$, $\theta = \arg(a + ib)$.

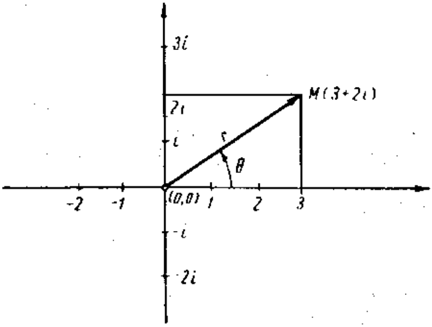


Fig. 17

Din formulele (1) obţinem

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

relaţii care determină pe θ, în afara unui multiplu de 2π. Tot relaţiile (1) ne dau şi

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos\theta + i\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta). \qquad (2)$$

Expresia (2) este numită şi *forma trigonometrică* a numărului complex $a + ib$, foarte utilă în calcule.

4. Inegalităţile modulului

Să reprezentăm pe un sistem de axe suma a două numere complexe

$$z = a + ib, \qquad z' = a' + ib' \; z + z' = a + a' + i(b + b').$$

Procedăm în modul următor: construim mai întîi vectorul care reprezintă pe z, $\overrightarrow{OM}$, apoi din M, considerat ca origine, construim vectorul $\overrightarrow{MM'}$, care are proiecţii pe axe pe a' şi b'. Vectorul rezultant $\overrightarrow{OM'}$ are ca proiecţii pe axa reală $a+a'$, iar pe axa imaginară $b + b'$.

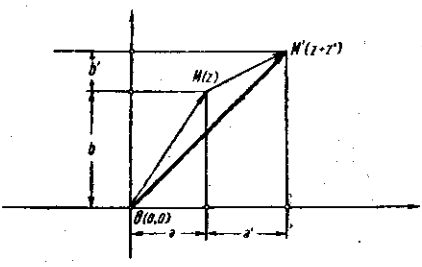


Fig. 18

Punctului M' îi corespunde numărul $z + z'$ (fig. 18),

și din neegalitățile cunoscute dintre laturile triunghiului OMM'

$$OM' \leqslant OM + MM'$$

$$OM' \geqslant OM - MM' \quad \text{și} \quad OM' \geqslant MM' - OM,$$

transcriindu-le cu ajutorul numerelor complexe, obținem

$$|a + a' + i(b + b')| \leqslant |a + ib| + |a' + ib'| \tag{1}$$

$$|(a + ib) + (a' + ib')| \geqslant ||a + ib| - |a' + ib'||, \tag{2}$$

adică modulul sumei a două numere complexe este cel mult egal cu suma modulelor celor două numere și cel puțin egal cu diferența modulelor celor două numere.

Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $z_k = a_k + ib_k$ sînt numere complexe, obținem prin recurență

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| \tag{3}$$

Modulul sumei a n numere complexe este mai mic sau cel mult egal cu suma modulelor celor n numere.

5. Formula lui Moivre

Fie z_1 și z_2 două numere complexe scrise sub forma trigonometrică

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Să efectuăm produsul lor

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)).$$

Aplicînd formulele cunoscute din trigonometrie

$$\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2),$$

obținem

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

Prin urmare:

1) Modulul produsului a două numere complexe este egal cu produsul modulelor celor două numere.

2) Argumentul produsului a două numere complexe este egal cu suma argumentelor celor două numere.

Prin recurență se obține pentru n numere complexe

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$z_1z_2\ldots z_n = r_1r_2\ldots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)], \tag{1}$$

deci :

1') Modulul produsului a n numere complexe este egal cu produsul modulelor celor n numere.

2') Argumentul produsului a n numere complexe este egal cu suma argumentelor celor n numere.

Să considerăm acum raportul a două numere complexe z_1, z_2

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}, \quad z_2 \neq 0.$$

Dacă înmulţim în partea a doua a egalităţii ambii termeni ai fracţiei cu $\cos\theta_2 - i\sin\theta_2$, obţinem

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

deci :

3) Modulul cîtului a două numere complexe este egal cu cîtul modulelor celor două numere.

4) Argumentul cîtului a două numere complexe este egal cu diferenţa argumentelor celor două numere (argumentul numărătorului mai puţin argumentul numitorului).

Să revenim la produsul a n numere complexe (1), şi anume să luăm

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z.$$

Vom avea

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$$

şi

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta.$$

Relaţia (1) se transformă în

$$r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

care ne dă, deoarece $r \neq 0$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{2}$$

Această formulă se numeşte formula lui *Moivre.*

În relaţia (2) n este un număr natural. Vom dovedi că formula lui Moivre este adevărată pentru n număr raţional. Să arătăm mai întîi că este adevărată pentru n negativ.

Din

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

obţinem

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)], \quad z \neq 0,$$

deci

$$\left[\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right]^n = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$$

sau

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta).$$

Pentru $n = \frac{1}{p}$ procedăm în modul următor:

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{p}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{p}\right)\right]^p = \cos\theta + i\sin\theta,$$

şi extrăgînd rădăcina de ordinul p

$$\cos\frac{\theta}{p} + i\sin\frac{\theta}{p} = \sqrt[p]{\cos\theta + i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{p}}.$$

Ridicînd acum la puterea q (întreg), obținem

$$\cos\left(\frac{q}{p}\theta\right) + i\sin\left(\frac{q}{p}\theta\right) = (\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{q}{p}}.$$

6. Extragerea rădăcinii de ordinul n dintr-un număr complex

Fie $a + ib$ un număr complex. Ne punem problema să determinăm un număr $z = x + iy$ astfel încît să avem

$$(x + iy)^n = a + ib$$

sau

$$x + iy = \sqrt[n]{a + ib}.$$

Numărul $x + iy$ îl numim *rădăcina de ordinul n* din numărul complex $a + ib$.
Scriind cele două numere sub forma trigonometrică

$$a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

avem, aplicînd formula lui Moivre pentru termenul din partea întîi,

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

deci

$$\rho^n = r, \quad \rho = r^{\frac{1}{n}},$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

ş numărul căutat este

$$x + iy = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$

unde k este un întreg arbitrar. Ar urma de aici că există o infinitate de rădăcini. În realitate sînt numai n rădăcini, deoarece $\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ şi $\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ iau, respectiv, valori egale pentru două valori ale lui k ce diferă printr-un multiplu al lui n. Într-adevăr, din

$$\frac{\theta + 2k'\pi}{n} - \frac{\theta + 2k''\pi}{n} = 2h\pi$$

rezultă

$$k' - k'' = nh.$$

În consecinţă avem numai n *rădăcini distincte* $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, ce se obţin dînd lui k valorile $0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$z_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$z_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{n}\right) \tag{1}$$

. . . .

$$z_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Cele n rădăcini se găsesc pe un cerc cu centrul în origine şi rază $R = r^{\frac{1}{n}}$, şi anume sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cerc, deoarece razele vectoare $Oz_k \cdot Oz_{k+1}$ fac unghiuri egale între ele şi egale cu $\frac{2\pi}{n}$.

În particular, un număr real are n rădăcini de ordinul n. Dacă $a > 0$, ecuaţia

$$x^n = a$$

are rădăcinile

$$x_0 = a^{\frac{1}{n}}$$

$$x_1 = a^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$x_2 = a^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}\right)$$

. . . .

$$x_{n-1} = a^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{n-1}{n}2\pi + i\sin\frac{n-1}{n}2\pi\right),$$

iar dacă $a < 0$, are rădăcinile

$$x_0 = a^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$x_1 = a^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}\right)$$

$$x_2 = a^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = a^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2n-1}{n}\pi + i\sin\frac{2n-1}{n}\pi\right)$$

și se obțin din (1), făcînd $\theta = 0$ și, respectiv, $\theta = \pi$.

Ecuația $x^n = a$, $a > 0$, are deci totdeauna o rădăcină reală $x_0 = a^{\frac{1}{n}}$ și mai admite o rădăcină reală dacă $\frac{2k\pi}{n} = \pi$, k întreg, ceea ce nu este posibil decît dacă n este par, cînd pentru $k = \frac{n}{2}$ ecuația are și rădăcina $- a^{\frac{1}{n}}$.

Ecuația $x^n = a$, $a < 0$, nu are decît cel mult o rădăcină reală, deoarece nu putem avea $\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} = 0$ pentru k întreg, iar ecuația $\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \pi$ nu admite rădăcini întregi decît pentru n impar, cînd $k = \frac{n-1}{2}$. În concluzie, orice număr real și pozitiv are două rădăcini reale de ordin par, egale și de semn contrar, și o singură rădăcină reală de ordin impar, iar un număr negativ are o singură rădăcină reală de ordin impar și nu are nici o rădăcină reală de ordin par.

7. Rezolvarea ecuațiilor binome

Rezultatele precedente permit rezolvarea ecuațiilor de forma

$$x^n + Ax^m = 0.$$

Pentru $m < n$ și numere naturale avem

$$x^m(x^{n-m} + A) = 0.$$

Ecuația dată se descompune în

$$x^m = 0,$$

cu rădăcină multiplă de ordinul m, $x = 0$, și în ecuația

$$x^{n-m} + A = 0,$$

care are $n - m$ rădăcini ce se obțin în modul expus la aliniatul precedent.

Exemplu

Să găsim cele șase rădăcini ale ecuației

$$x^6 = i.$$

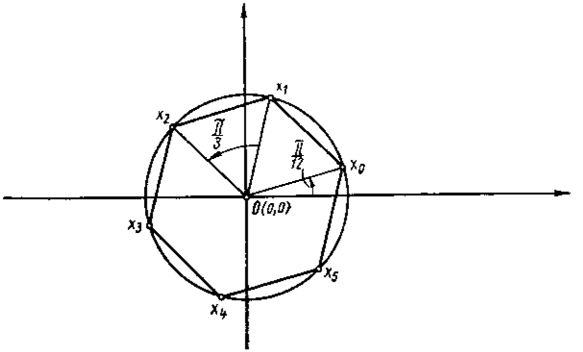


Fig. 19

Numărul complex i are modulul 1 și argumentul $\frac{\pi}{2}$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Rădăcinile ecuației sînt:

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$x_1 = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$x_2 = \cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$x_4 = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$x_5 = \cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12} = +\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_5$ sînt vîrfurile unui hexagon înscris în cercul de rază unu (fig. 19).

Capitolul II

ANALIZA COMBINATORIE

§ 1. ARANJĂRI. PERMUTĂRI. COMBINĂRI. INVERSIUNI

1. Aranjări

Fie n obiecte $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Numim aranjări ale acestor n obiecte luate cîte m, $n \geqslant m$, grupările care se pot face cu cîte m obiecte distincte din cele n obiecte date, astfel încît fiecare grupare să difere de celelalte fie prin ordinea obiectelor, fie prin natura lor. Vom nota numărul lor cu A_n^m.

Exemplu

Aranjările a patru obiecte a, b, c, d, luate cîte două, sînt

$$\begin{matrix} ab, & ac, & ad \\ ba, & bc, & bd \\ ca, & cb, & cd \\ da, & db, & dc \end{matrix}$$

şi numărul lor este 12.

Ne propunem să găsim numărul A_n^m. În acest scop vom stabili o formulă de recurenţă. Să presupunem că am format tabloul grupărilor tuturor aranjărilor a n obiecte luate cîte $m-1$, $\widetilde{A}_n^{m-1}$. Să vedem cum putem deduce din acesta tabloul grupărilor $\widetilde{A}_n^m$.

O grupare din $\widetilde{A}_n^{m-1}$ conţine $m-1$ elemente; rămîn deci în afara grupării $n-m+1$ elemente. Pentru a forma toate grupările din $\widetilde{A}_n^m$, deduse din această grupare, este suficient să luăm fiecare element din cele $n-m+1$ rămase şi să-l aşezăm la urma grupării considerate din $\widetilde{A}_n^{m-1}$. Toate grupările astfel formate sînt distincte între ele, deoarece diferă prin ultimul element.

Dacă procedăm în acelaşi mod cu toate grupările lui $\widetilde{A}_n^{m-1}$ (care sînt diferite între ele fie prin poziţia elementelor, fie prin natura elementelor), obţinem grupări care diferă sau prin ultimul element, sau, dacă acest element

este acelaşi, prin faptul că, suprimînd ultimul element, sînt grupări din $\widetilde{A}_n^{m-1}$, deci distincte. Avem, aşadar, formula de recurenţă

$$A_n^m = (n - m + 1) A_n^{m-1},$$

în care, dacă facem $m = 2, 3, \ldots, m$, obţinem

$$A_n^2 = (n - 1) A_n^1$$
$$A_n^3 = (n - 2) A_n^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n^m = (n - m + 1) A_n^{m-1}.$$

Înmulţind pe coloane obţinem

$$A_n^m = (n - 1) (n - 2) \ldots (n - m + 1) A_n^1,$$

numărul $A_n^1 = n$ fiind numărul aranjărilor a n obiecte luate cîte unul; deci

$$A_n^m = n (n - 1) \ldots (n - m + 1),$$

adică produsul primelor m numere consecutive descrescătoare $\leqslant n$.

Exemplu

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

2. Permutări

Numim permutări a n obiecte grupările ce pot fi formate cu aceste n obiecte, luate cîte n, fiecare grupare diferind de celelalte prin poziţia obiectelor, toate obiectele unei grupări fiind distincte. Numărul lor îl vom nota cu P_n. Din definiţie rezultă că

$$P_n = A_n^n = 1 \cdot 2 \cdot 3. \ldots n = n!$$

adică P_n este produsul primelor n numere naturale. Notaţia $n!$ se citeşte „factorial de n".

Putem stabili şi aici o formulă de recurenţă. Într-adevăr, dacă $\widetilde{P}_{n-1}$ este tabloul permutărilor a $n - 1$ obiecte, pentru a forma tabloul permutărilor a n obiecte este suficient ca, în fiecare grupare, obiectul care nu este conţinut în ea să fie aşezat în cele n locuri ce le poate ocupa în grupare. Unei grupări din $\widetilde{P}_{n-1}$ îi vor corespunde n grupări din tabloul lui $\widetilde{P}_n$, deci

$$P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

Făcînd $n = 2, 3, \ldots, n$ şi ţinînd seama că $P_1 = 1$, rezultă aceeaşi formulă.

Exemplu

Să se calculeze cîte poziţii pot ocupa 15 persoane aşezate în rînd şi în cît timp pot fi executate aceste mişcări dacă se execută la interval de o secundă.

Numărul acestor poziții este $15! = 1.2.3.4. \dots 15$. Timpul necesar este $15! : [60 \times \times 60 \times 24 \times 360] = 42\,042$ ani.

Din acest exemplu se vede că numărul $n!$ crește foarte repede cu n.

3. Combinări

Numim combinări a n obiecte luate cîte m, $m \leqslant n$, grupările ce se pot forma cu n obiecte luate cîte m, fiecare grupare diferind de celelalte numai prin natura obiectelor, ordinea lor neavînd importanță, în fiecare grupare obiectele fiind distincte. Vom nota numărul lor C_n^m.

Exemplu

Combinările elementelor a, b, c, d, luate cîte două, sînt

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad \\ \quad\ \ bc,\ bd \\ \qquad\quad\ cd, \end{array}$$

deci $C_4^2 = 6$.

Să considerăm tabloul combinărilor a n obiecte luate cîte m și în fiecare grupare să facem toate permutările posibile.

Tabloul astfel obținut este $\tilde{A}_n^m$, deoarece fiecare grupare diferă de celelalte fie prin natura obiectelor, fie prin poziția lor. Să mai observăm că dintr-o grupare din tabloul $\tilde{C}_n^m$ obținem $P_m = m!$ grupări în tabloul final, deci

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

sau

$$C_n^m = \frac{m(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2.3 \dots m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Dacă înlocuim pe m cu $n - m$ obținem

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

fapt ce se poate demonstra și direct, deoarece, dacă considerăm tabloul C_n^m, unei grupări de m obiecte îi corespunde gruparea complimentară de $n - m$ obiecte, deci

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Numărul C_n^m este întreg și din formula

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2.3 \dots m}$$

deducem că *produsul a p numere naturale consecutive este divizibil cu produsul primelor p numere naturale consecutive.*

Exerciții

1) Să arătăm că avem

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m .$$

Într-adevăr

$$C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!\,(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,(m+n-m)}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} .$$

2) Să dăm, în această egalitate, lui n valorile $n, n-1, \ldots, m$; obținem

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$
$$C_{n-1}^m = C_{n-2}^m + C_{n-2}^{m-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_m^m = C_{m-1}^{m-1}$$

şi dacă adunăm pe coloane obținem egalitatea

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^{m-1} .$$

4. Aranjări cu repetiție

Dacă în definiția dată aranjărilor simple suprimăm restricția ca obiectele ce intervin într-o grupare să fie distincte, obținem *aranjări cu repetiție*.

Exemplu

Aranjările în repetiție a 3 elemente a, b, c, luate cîte două, sînt

aa, ab, ac
ba, bb, ba
ca, cb, cc

şi numărul lor este $9 = 3^2$.

Să presupunem că am format tabloul aranjărilor cu repetiție a n obiecte luate cîte $m-1$, $\tilde{\alpha}_n^{m-1}$. Tabloul corespunzător al aranjărilor cu repetiție a n obiecte luate cîte m se obține așezînd în fiecare grupare, la sfîrșit, fiecare din cele n elemente, deci, dacă notăm numărul aranjărilor cu repetiție a n obiecte luate cîte m cu α_n^m, obținem formula de recurență

$$\alpha_n^m = n\alpha_n^{m-1}$$

şi cum $\alpha_n^1 = n$, rezultă că

$$\alpha_n^m = n^m .$$

Pentru aranjări cu repetiție nu se mai cere condiția $m \leqslant n$, deoarece aranjările cu repetiție a n obiecte luate cîte m cu $m \geqslant n$ au sens.

Exemplu

$$\alpha_3^7 = 3^7.$$

5. Permutări cu repetiție

Dacă $m = n$, din formula aranjărilor cu repetiție obținem formula care dă numărul permutărilor cu repetiție a n obiecte

$$\Pi_n^n = n^n.$$

6. Combinări cu repetiție

Într-o grupare a combinărilor obișnuite de n obiecte luate cîte m, obiectele care constituiau gruparea erau distincte. Să presupunem că obiectele se pot repeta; în acest caz avem combinări cu repetiție. Vom nota numărul lor cu γ_n^m.

Exemplu

Combinările cu repetiție a patru obiecte a, b, c, d, luate cîte trei, sînt

$$\begin{matrix} abc, & abd, & acd, & bcd \\ aaa, & aab, & aac, & aad \\ bba, & bbb, & bbc, & bbd \\ cca, & ccb, & ccc, & ccd \\ dda, & ddb, & ddc, & ddd \end{matrix}$$

deci $\gamma_4^3 = 20$.

Ne propunem să găsim numărul combinărilor cu repetiție γ_n^m a n obiecte luate cîte m. Se înțelege că și aici restricția $m \leqslant n$ cade. Pentru a stabili o formulă de recurență vom număra în două moduri diferite de cîte ori intervine un obiect în tabloul $\tilde{\gamma}_n^m$.

Din motive de simetrie, fiecare obiect intervine de același număr de ori și, cum avem

$$m \cdot \gamma_n^m$$

elemente în tablou, urmează că un element a_1, de exemplu, intervine de

$$\frac{m}{n} \cdot \gamma_n^m \text{ ori.}$$

Să suprimăm acum o singură dată obiectul a_1, în fiecare grupare în care apare acest obiect. Combinările modificate vor fi

$$\gamma_n^{m-1}$$

şi ele conţin pe a_1 de

$$\frac{m-1}{n}\cdot\gamma_n^{m-1} \text{ ori,}$$

conform formulei stabilite. În acelaşi timp, am suprimat pe a_1 din fiecare grupare a lui γ_n^{m-1}, deci obiectul a_1 este conţinut de

$$\gamma_n^{m-1}+\frac{m-1}{n}\cdot\gamma_n^{m-1}=\frac{n+m-1}{n}\cdot\gamma_n^{m-1} \text{ ori.}$$

Egalînd cele două rezultate, obţinem formula de recurenţă

$$\gamma_n^m=\frac{n+m-1}{m}\cdot\gamma_n^{m-1}$$

şi dacă facem $m=2, 3, \ldots, m$ obţinem

$$\gamma_n^m=\frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+1)}{m!}\cdot\gamma_n^1.$$

Însă $\gamma_n^1=n$, deci

$$\gamma_n^m=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}=\frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}=C_{m+n-1}^m$$

şi se vede că putem exprima combinările cu repetiţie cu ajutorul combinărilor obişnuite.

Exemplu

Fie un polinom omogen de grad n în p variabile $x_1, x_2, \ldots, x_p$; numărul termenilor săi este $\gamma_p^n=C_{n+p-1}^n$. Dacă polinomul nu este omogen, îl putem omogeniza cu o nouă variabilă, deci numărul termenilor unui polinom neomogen de grad n în p variabile este

$$\gamma_{p+1}^n=C_{n+p}^n.$$

7. Inversiuni

Fie n elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Numim ordine naturală de succesiune a elementelor permutarea $a_1 a_2 \ldots a_n$ care corespunde ordinii naturale $1, 2, \ldots, n$ a indicilor. Orice altă permutare a acestor n elemente spunem că prezintă inversiuni, o inversiune fiind orice pereche de elemente $a_i a_j$ din permutare, cu $i>j$.

Permutarea $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$ prezintă numărul maxim de inversiuni, număr dat de

$$n-1+n-2+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Dacă notăm cu I numărul inversiunilor pe care îl poate avea o permutare, rezultă

$$0\leqslant I\leqslant\frac{n(n-1)}{2}.$$

Vom împărţi permutările a n elemente în două clase, după numărul de inversiuni pe care îl prezintă. Din clasa întîi fac parte permutările cu numărul de inversiuni I par; din clasa a doua, cele cu numărul de inversiuni I impar.

În teoria determinanţilor este utilă următoarea

Teoremă. O permutare îşi schimbă clasa dacă schimbăm două elemente între ele.

Demonstraţie. Vom considera două cazuri. În primul caz cele două elemente sînt alăturate, deci permutarea va fi de forma

$$Aa_i\ a_j\ B$$

şi are I inversiuni. Permutarea obţinută prin schimbarea lui a_j cu a_i

$$A\ a_j\ a_i\ B$$

are $I+1$ inversiuni dacă $i>j$ şi $I-1$ inversiuni dacă $i<j$, deoarece inversiunile lui a_i şi a_j faţă de A şi inversiunile lui B faţă de a_i şi a_j nu se schimbă prin această operaţie. Dacă I este par (sau impar), $I+1$ sau $I-1$ sînt impari (sau pari), deci permutarea îşi schimbă clasa.

În al doilea caz, a_i şi a_j nu sînt consecutive, deci permutarea va fi de forma

$$A\ a_i\ C\ a_j\ B,$$

şi schimbînd pe a_j cu a_i avem permutarea

$$A\ a_j\ C\ a_i\ B.$$

Presupunem că C are p elemente; schimbînd pe a_j cu C obţinem

$$A\ a_i\ a_j\ C\ B$$

şi realizăm astfel p schimbări de clasă. Dacă aducem acum pe a_i în locul lui a_j, se realizează $p+1$ schimbări de clasă, deci numărul final al schimbărilor de clasă va fi $p+p+1$, ceea ce arată că permutarea îşi schimbă clasa; cu aceasta teorema este demonstrată. Din totalul de $n!$ permutări, $\frac{n!}{2}$ aparţin unei clase, şi $\frac{n!}{2}$ celeilalte, deoarece, dacă schimbăm două elemente anumite în toate permutările a n obiecte, permutările dintr-o clasă trec în permutările din cealaltă clasă, fără ca în ansamblul lor permutările să se schimbe.

8. Puterea unui binom

Să arătăm că avem dezvoltarea

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^n a^n, \tag{1}$$

unde n este un număr întreg pozitiv, numită şi *formula binomului lui Newton.*

Vom demonstra formula prin *recurență* (inducție completă). Iată în ce constă această metodă de demonstrație pe care o vom folosi deseori. Fie P o proprietate care se referă la numerele naturale. Dacă

1) proprietatea este adevărată pentru numărul natural 1,

2) presupunînd proprietatea P adevărată pentru un număr natural $n-1$, se arată că proprietatea este adevărată și pentru n,

atunci rezultă că proprietatea este adevărată pentru toate numerele naturale.

Formula (1) este adevărată pentru $n = 1$, deoarece

$$(x+a)^1 = x + a = C_1^0 x + C_1^1 a.$$

Presupunem formula (1) adevărată pentru $n-1$

$$(x+a)^{n-1} = C_{n-1}^0 x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2} a + \ldots + C_{n-1}^k x^{n-1-k} a^k + \ldots + C_{n-1}^{n-1} a^{n-1}$$

sau

$$(x+a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{n-1-k} a^k.$$

Să arătăm acum că este adevărată și pentru n. Înmulțim cu $x + a$

$$(x+a)^n = (x+a)\left[\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot x^{n-1-k} a^k\right].$$

Coeficientul lui x^{n-k} este

$$a^k \cdot [C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}] = a^k \cdot C_n^k,$$

deoarece, conform cap. II, § 1, al. 3, ex. 1, $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$; prin urmare, formula este adevărată și pentru n. Rezultatul dezvoltării lui $(x+a)^n$ este deci un polinom omogen de gradul n, în x și a. Remarcăm în (1) că coeficienții egal depărtați de extremități sînt egali, deoarece $C_n^k = C_n^{n-k}$. Avem

$$C_m^{k-1} < C_n^k \text{ sau } \frac{n-k-1}{k} > 1 \text{ pentru } k \leqslant E\left(\frac{n-1}{2}\right), \text{ unde } E\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

este partea întreagă a lui $\frac{n-1}{2}$; de aici urmează că coeficienții binomului merg crescînd către termenii din mijloc. Dacă n este par, atunci $C_n^{\frac{n}{2}}$ este coeficientul maxim, iar dacă n este impar, coeficienții maximi sînt

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{și} \quad C_n^{\frac{n+1}{2}},$$

care sînt egali.

Comparînd coeficienții a doi termeni consecutivi

$$t_k = C_n^k a^k x^{n-k}, \quad t_{k+1} = C_n^{k+1} \cdot x^{n-k-1} a^k,$$

obținem

$$\frac{t_k+1}{t_k} = \frac{a}{x} \cdot \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{a}{x} \cdot \frac{m!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{k!\,(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x}.$$

din care deducem imediat următoarea regulă de formare a coeficientului unui termen al binomului cu ajutorul coeficientului termenului situat înaintea lui.

Regulă. Pentru a afla termenul t_{k+1}, deci dezvoltarea binomului $(a+x)^n$, se înmulţeşte termenul precedent t_k cu

$$\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{a}{x},$$

unde $n-k$ este exponentul din termenul t_k al lui x, $k+1$ exponentul lui a mărit cu unu din t_k, iar $t_0 = x^n$.

Formula binomului este adevărată şi în complex, deoarece operaţiile ce au intervenit în stabilirea formulei sînt valabile şi în corpul numerelor complexe

$$\begin{aligned}(a+ib)^n &= a^n - C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^4 a^{n-4}b^4 - C_n^6 a^{n-6}b^6 + \dots\\ &\dots + i(C_n^1 a^{n-1}b - C_n^3 a^{n-3}b^3 + C_n^5 a^{n-5}b^5 - C_n^7 a^{n-7}b^7 + \dots).\end{aligned} \tag{2}$$

Exerciţii

1) Dacă în formula binomului facem $a=1$, $x=1$, obţinem

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n.$$

2) Dacă în formula (2) înlocuim pe $a+ib$ cu $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, obţinem

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=(1+i)^n,$$

deci

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \dots = 2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Aplicaţii

1) Să se calculeze sumele

$$S_p = 1^p + 2^p + \dots + n^p,\quad p = 1, 2, \dots .$$

Avem, conform formulei binomului,

$$(x+1)^p = x^p + C_p^1 x^{p-1} + C_p^2 x^{p-2} + \dots + C_p^p x^0$$

În această egalitate să facem succesiv $x = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}2^p &= 1^p + C_p^1 1^{p-1} + C_p^2 1^{p-2} + \dots + C_p^p 1^0\\ 3^p &= 2^p + C_p^1 2^{p-1} + C_p^2 2^{p-2} + \dots + C_p^p 2^0\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (n+1)^p &= n^p + C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-2} + \dots + C_p^p n^0.\end{aligned}$$

Adunîndu-le, obţinem, după simplificările cuvenite,

$$(n+1)^p - 1 = C_p^0 S_0 + C_p^1 S_1 + \dots + C_p^{p-1} S_{p-1}.$$

Deoarece $S_0 = n$, formula obţinută ne permite să calculăm pe $S_1, S_2, S_3, \ldots$

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2,$$

deci *suma cuburilor primelor n numere naturale este un pătrat perfect.*

2) Plecînd de la formula lui Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n,\ \text{natural}),$$

obţinem

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \ldots \\ \sin n\theta &= C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Deci $\cos n\theta$ se poate exprima raţional cu ajutorul lui $\cos\theta$ pentru orice n natural, în timp ce $\sin n\theta$ se exprimă raţional cu ajutorul lui $\sin\theta$ numai pentru n impar.

Din formulele (2) obţinem şi

$$\operatorname{tg} n\theta = \frac{C_n^1\operatorname{tg}\theta - C_n^3\operatorname{tg}^3\theta + C_n^5\operatorname{tg}^5\theta - \ldots}{1 - C_n^2\operatorname{tg}^2\theta + C_n^4\operatorname{tg}^4\theta - C_n^6\operatorname{tg}^6\theta + \ldots}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\operatorname{ctg}^n\theta - C_n^2\operatorname{ctg}^{n-2}\theta + C_n^4\operatorname{ctg}^{n-4}\theta - \ldots}{C_n^1\operatorname{ctg}^{n-1}\theta - C_n^3\operatorname{ctg}^{n-3}\theta + C_n^5\operatorname{ctg}^{n-5}\theta - \ldots}.$$

9. Puterea unui polinom

Ne propunem să stabilim formula care dă dezvoltarea lui

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n.$$

Rezultatul va fi un polinom omogen de grad n în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m$, deci

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum A_{p_1 p_2 \ldots p_m} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_m^{p_m},$$

unde $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$, p_i numere întregi pozitive sau nule, iar $A_{p_1 p_2 \ldots p_m}$ un coeficient numeric. Pentru determinarea lui $A_{p_1 p_2 \ldots p_m}$ procedăm în modul următor. Să notăm

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_m = x.$$

Coeficientul lui $x_1^{p_1}$ din dezvoltarea binomului $(x_1 + x)^n$ este

$$C_n^{p_1}(x_2 + x_3 + \ldots + x_m)^{n-p_1}.$$

Dacă notăm acum $x_3 + x_4 + \ldots + x_m = y$, coeficientul lui $x_2^{p_2}$ din dezvoltarea $(x_2 + y)^{n-p_1}$ este

$$C_{n-p_1}^{p_2}(x_3 + x_4 + \ldots + x_m)^{n-p_1-p_2},$$

deci termenii care conţin pe $x_1^{p_1}x_2^{p_2}$ în factor sînt daţi de

$$C_n^{p_1}C_{n-p_1}^{p_2}(x_3 + x_4 + \ldots + x_m)^{n-p_1-p_2},$$

regulă care ne dă imediat coeficientul lui $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_m^{p_m}$

$$A_{p_1 p_2 \ldots p_m} = C_n^{p_1} \cdot C_{n-p_1}^{p_2} \ldots C_{n-p_1-p_2-\ldots-p_{m-1}}^{p_m} =$$
$$= \frac{n!}{p_1!(n-p_1)!} \cdot \frac{(n-p_1)!}{p_2!(n-p_1-p_2)!} \cdots \frac{(n-p_1-p_2-\ldots-p_{m-1})!}{p_m!(n-p_1-p_2-\ldots-p_m)!},$$

deci

$$A_{p_1 p_2 \ldots p_m} = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_m!}.$$

În concluzie avem formula

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_p \frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_m!} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_m^{p_m},$$

unde p_i sînt numere întregi pozitive sau zero cu $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$, iar $0! = 1$.

Observație

Coeficientul $\frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_m!} = A_{p_1 p_2 \ldots p_m}$

reprezintă numărul permutărilor a n elemente nu toate distincte, și anume permutările unde elementul a_1 figurează de p_1 ori, elementul a_2 de p_2 ori, în fine elementul a_m figurează de p_m ori. Într-adevăr, dacă în fiecare grupare a lui $\widetilde{A}_{p_1 p_2 \ldots p_m}$ facem toate permutările posibile ale celor p_i elemente a_i presupuse de astă dată distincte ($i = 1, 2, \ldots, m$), obținem

$$p_1!\, p_2! \ldots p_m!\, A_{p_1 p_2 \ldots p_m},$$

grupări care sînt tocmai permutările a $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$ elemente, unde, de astă dată, elementele sînt socotite toate distincte, deci

$$p_1!\, p_2! \ldots p_m!\, A_{p_1 p_2 \ldots p_m} = (p_1 + p_2 + \ldots + p_m)! = n!,$$

relație din care obținem pe $A_{p_1 p_2 \ldots p_m}$.

Exemple

1) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i \neq j = 1 \\ i < j}}^{m} x_i x_j.$

2) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^3 = \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + 3 \sum_{\substack{i \neq j = 1 \\ i < j}}^{m} x_i^2 x_j + 6 \sum_{\substack{i \neq j \neq k = 1 \\ i < j < k}}^{m} x_i x_j x_k.$

3) Să se găsească coeficientul lui x^5 din dezvoltarea $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^5$.

Avem

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^5 = \sum \frac{5!}{a!\, b!\, c!\, d!\, e!} x^{b+2c+3d+4e}.$$

Coeficientul lui x^5 se găseşte rezolvînd în numere întregi sistemul

$$a + b + c + d + e = 5$$
$$b + 2c + 3d + 4e = 5,$$

care se numeşte *sistem diofantic* *. Soluţiile problemei sînt cuprinse în tabelul

a	3	3	2	1	2	0
b	1	0	2	3	1	5
c	0	1	0	1	2	0
d	0	1	1	0	0	0
e	1	0	0	0	0	0

deci coeficientul lui x^6 este numărul

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5}{2!\,2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!\,2!} + \frac{5!}{5!} = 20 + 20 + 30 + 20 + 30 + 1 = 121.$$

* Un sistem în care coeficienţii sînt numere întregi şi care trebuie rezolvat tot în numere întregi, se numeşte sistem diofantic.

Capitolul III

DETERMINANȚI. MATRICE

§ 1. DETERMINANȚI DE ORDINUL AL DOILEA

1. Sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, neomogen

Să considerăm sistemul de două ecuații cu două necunoscute,

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

neomogen (deoarece presupunem că c și c' nu sînt simultan nule).

Înmulțim prima ecuație cu b', a doua ecuație cu $-b$ și adunăm

$$(ab' - ba')\,x + cb' - bc' = 0. \tag{1'}$$

Înmulțim prima ecuație cu $-a'$, ecuația a doua cu a și adunăm

$$(ab' - ba')\,y + c'a - a'c = 0, \tag{1''}$$

deci, dacă $ab' - ba' \neq 0$, obținem *soluția unică*

$$x = -\frac{cb' - c'b}{ab' - ba'}; \qquad y = -\frac{ac' - a'c}{ab' - ba'}. \tag{2}$$

Spunem în acest caz că sistemul (1) este *compatibil și determinat.*

Definiție. Numărul

$$ab' - ba'$$

se numește determinant de ordinul al doilea și se notează

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

În baza acestei definiții, soluția sistemului (1) se scrie

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad y = -\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \tag{2'}$$

Determinantul de la numitor se numește *determinantul sistemului* și este format cu coeficienții necunoscutelor x, y. Avem deci următoarea

T e o r e m ă. Dacă determinantul sistemului (1) este diferit de zero, atunci sistemul este compatibil și determinat.

Să presupunem că determinantul sistemului (1) este nul. În acest caz, ecuațiile (1′) și (1″) se scriu

$$0 \cdot x + \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0, \qquad 0 \cdot y + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

deci dacă

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$$

sistemul este imposibil, deoarece nu există valori pentru x și y care să-l satisfacă.

T e o r e m ă. Dacă

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0,$$

sistemul (1) nu are soluții (este imposibil).

Să presupunem acum că determinantul sistemului este nul și în plus unul din determinanții de la numărător în (2′) este de asemenea nul.

Dacă $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, urmează că $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, iar dacă $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0$, avem și $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, de unde rezultă că $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, deci și determinantul $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ este nul. Să punem

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

Avem

$$a = ka', \quad b = kb', \quad c = kc'$$

și sistemul se transformă în

$$\begin{aligned} k\,(a'x + b'y + c') &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

adică se reduce la o singură ecuaţie. Soluţiile sînt

$$x = -\frac{b'}{a'}y - \frac{c'}{a'}, \tag{4}$$

unde y este arbitrar. Avem deci o infinitate de soluţii. Spunem că sistemul (1) este *compatibil* (deoarece admite soluţii), *însă nedeterminat*. Dacă t este un parametru arbitrar putem scrie (4) şi sub forma

$$\begin{aligned} y &= a' t \\ x &= -b' t - \frac{c'}{a'} \end{aligned} \tag{4'}$$

şi avem astfel soluţiile sistemului (1) sub *formă parametrică*.

Teoremă. Dacă

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

sistemul (1) are o infinitate de soluţii (este compatibil şi nedeterminat).

2. Sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute, omogen

Sistemul

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ a'x + b'y &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

este compatibil, deoarece admite soluţia $x = 0$, $y = 0$, numită şi *soluţia banală*. Să vedem în ce condiţii are şi alte soluţii în afară de cea banală. Dacă $a \neq 0$

$$x = -\frac{b}{a}y,$$

soluţie care trebuie să verifice şi ecuaţia a doua, deci

$$y\left(b' - \frac{a'b}{a}\right) = 0,$$

şi, cum $y \neq 0$, urmează că

$$ab' - a'b = 0.$$

Reciproc, dacă $ab' - ba' = 0$, rezultă că sistemul are şi alte soluţii în afară de soluţia banală. Avem, aşadar, următoarea

Teoremă. Sistemul (1) admite şi alte soluţii în afară de $x = 0$, $y = 0$ dacă determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

este nul.

Dacă punem

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k,$$

sistemul (1) se reduce la

$$ax + by = 0$$
$$k(ax + by) = 0,$$

adică la o singură ecuație $ax + by = 0$, care are soluțiile

$$\begin{matrix} x = -bt \\ y = at \end{matrix} \quad \text{(sub formă parametrică)}$$

sau

$$\frac{x}{-b} = \frac{y}{a} = t. \qquad (a, b \neq 0)$$

3. Sistem de două ecuații liniare cu trei necunoscute omogen,

Fie sistemul

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

care admite totdeauna soluția $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (banală).

Dacă împărțim cu $z \neq 0$ fiecare din ecuațiile sistemului, obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute, neomogen

$$a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c = 0$$

$$a'\frac{x}{z} + b'\frac{y}{z} + c' = 0,$$

care are soluția

$$\frac{x}{z} = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

sau

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = t, \tag{2}$$

deci sistemul admite o infinitate de soluții ce depind de parametrul t (sistemul e compatibil și nedeterminat).

Dacă scriem soluțiile sub forma

$$x = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \cdot t, \quad y = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} \cdot t, \quad z = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot t, \tag{2'}$$

se vede că ele există, chiar dacă unul din determinanții ce intervin este nul.

Este de remarcat faptul că determinanții cu ajutorul cărora se scriu soluțiile lui (1) se obțin din tabelul

$$M = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix}$$

numit *matrice*, tabel format cu coeficienții necunoscutelor sistemului (1).

Dacă doi din determinanții ce intervin în (2′) sînt nuli, atunci

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

deci și al treilea determinant este nul. Sistemul se reduce la ecuația

$$ax + by + cz = 0$$

și are soluțiile

$$x = -\frac{1}{a}(bu + cv) \qquad (a \neq 0)$$

$$y = u, \qquad z = v,$$

u, v fiind parametrii arbitrari.

4. Determinanți de ordinul al doilea

Am văzut că discuția unui sistem de două ecuații liniare se poate face complet cu ajutorul determinanților de ordinul al doilea. Este necesar să studiem îndeaproape proprietățile lor. Determinantul

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

are $4 = 2^2$ elemente, a, b, c, d, așezate pe două linii, *linia întîi* formată din elementele a, b, și *linia a doua* formată din elementele c, d. Elementele a, c formează *coloana întîi*, și b, d *coloana a doua*. În fine, elementele a, d sînt pe *diagonala principală*.

Proprietatea 1. Un determinant își schimbă semnul dacă permutăm elementele a două linii între ele sau elementele a două coloane între ele.

Fie determinanții $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ și $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$; ultimul s-a obținut din primul, schimbînd linia întîi cu linia a doua;

avem

$$D_2 = ad - bc, \quad \Delta_2 = bc - ad,$$

deci

$$D_2 = -\Delta_2.$$

În mod asemănător, dacă $\Delta_2' = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ este determinantul ce se obține din D_2 permutînd elementele coloanei întîi cu elementele coloanei a doua, avem

$$\Delta_2' = bc - ad = -D_2.$$

Proprietatea 2. Un determinant este nul dacă are două linii sau două coloane egale.

Determinantul $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$ are cele două linii egale și $\Delta_2 = ab - ab = 0$.

Determinantul $\Delta_2' = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$ are cele două coloane egale și $\Delta_2' = ab - ab = 0$.

Proprietatea 3. Un determinant nu-și schimbă valoarea dacă schimbăm toate liniile cu coloanele de același rang.

Dacă $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, determinantul Δ_2, carese obține din D_2 schimbînd liniile cu coloanele, este

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = D_2.$$

Proprietatea 4. Dacă la un determinant înmulțim elementele unei linii sau coloane cu un număr m, determinantul se înmulțește cu numărul m.

Fie determinantul $\Delta_2 = \begin{vmatrix} am & bm \\ c & d \end{vmatrix}$ ce se obține din determinantul $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ înmulțind elementele primei linii cu numărul m. Obținem

$$\Delta_2 = amd - bmc = m\,(ad - bc) = m\,D_2.$$

Proprietatea 5. Dacă într-un determinant elementele unei linii (sau coloane) sînt sume de k numere, atunci determinantul se descompune într-o sumă de k determinanți.

Fie determinantul $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix}$, în care elementele primei inii sînt sumă de două elemente.

$$\Delta_2 = (a + a')\,d - (b + b')\,c = (ad - bc) + (a'd - b'c),$$

deci

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Aceeași demonstrație pentru $k > 2$.

Proprietatea 6. Într-un determinant, dacă la elementele unei linii (sau coloane) adunăm elementele celeilalte linii (sau coloane) înmulțite cu un număr, determinantul nu-și schimbă valoarea.

Fie

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ și } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a + mc & b + md \\ c & d \end{vmatrix}$$

Folosind proprietățile 5, 4 și 2, avem

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mc & md \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

§ 2. DETERMINANȚI DE ORDINUL AL TREILEA

1. Sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute, neomogen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Putem elimina simultan pe x_2 și x_3 din ecuațiile sistemului dacă înmulțim prima ecuație cu A_1, a doua ecuație cu A_2, a treia ecuație cu A_3 și le adunăm, numerele A_1, A_2, A_3 fiind o soluție nebanală a următorului sistem

$$\begin{aligned} a_{12}A_1 + a_{22}A_2 + a_{32}A_3 = 0 \\ a_{13}A_1 + a_{23}A_2 + a_{33}A_3 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Într-adevăr, dacă adunăm ecuațiile sistemului (1) astfel înmulțit, obținem

$$(a_{11}A_1 + a_{21}A_2 + a_{31}A_3)\ x_1 + A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3 = 0$$

și dacă

$$a_{11}A_1 + a_{21}A_2 + a_{31}A_3 \neq 0$$

rezultă imediat

$$x_1 = -\frac{b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3}{a_{11}A_1 + a_{21}A_2 + a_{31}A_3}.$$

Conform A. cap. III, § 1, al. 3, A_1, A_2, A_3 sînt date de

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot t, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{12} \\ a_{33} & a_{13} \end{vmatrix} \cdot t, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t$$

și, dacă le introducem în expresia lui x, factorul t se simplifică astfel încît obținem

$$x = -\frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_{32} & a_{12} \\ a_{33} & a_{13} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}{a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{12} \\ a_{33} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

Numărul de la numitor

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \tag{3}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

se notează

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

și se numește determinantul elementelor a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$; este un determinant de ordinul al treilea, deoarece are trei linii și trei coloane.

Expresia (3) reprezintă dezvoltarea determinantului (4) după coloana întîi.

Ținînd seama de această definiție, urmează că și numărătorul lui x_1 este un determinant, și anume

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

și se obține din determinantul (4), care și în acest caz se numește ***determinantul sistemului***, înlocuind coloana coeficienților lui x_1 cu termenii liberi. Procedînd în mod asemănător, obținem pe x_2 și x_3

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Determinantul de la numitor este tot determinantul sistemului, care este prin ipoteză diferit de zero. Numărătorul lui x_2 este un determinant ce

se obține din determinantul sistemului, înlocuind coloana coeficienților lui x_2 cu termenii liberi. Aceeași regulă și pentru x_3.

Avem, așadar, următoarea

T e o r e m ă. Un sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute, cu determinantul sistemului nenul, este c o m p a t i b i l d e t e r m i n a t.

2. Sistem de trei ecuații liniare cu două necunoscute, neomogen

Un astfel de sistem este

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

și în general nu este compatibil. Într-adevăr, primele două ecuații, dacă $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, determină pe x_1 și x_2

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{2}$$

însă acest sistem de soluții nu verifică și ecuația a treia dacă a_{31}, a_{32}, a_{33} sînt oarecare. Pentru ca x_1 și x_2 date de (2) să verifice și ecuația ultimă din sistem, trebuie ca

$$\begin{aligned} -a_{31}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \\ = -a_{31}a_{13}a_{22} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21} + a_{33}a_{11}a_{22} &- \\ - a_{33}a_{12}a_{21} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Se observă, dacă se ține seama de dezvoltarea obținută la aliniatul precedent, că este tocmai valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Avem deci următoarea

T e o r e m ă. Un sistem de trei ecuații cu două necunoscute este compatibil dacă determinantul format cu coeficienții necunoscutelor și termenii liberi este nul.

3. Sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute, omogen

Sistemul

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

este compatibil, deoarece admite totdeauna soluția $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ (soluția banală). Să vedem în ce condiții admite și alte soluții în afară de cea banală. Împărțind fiecare ecuație a sistemului cu $x_3 \neq 0$, ajungem la un sistem de trei ecuații cu două necunoscute, $\frac{x_1}{x_3}$ și $\frac{x_2}{x_3}$, discutat la aliniatul precedent, deci

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

care verifică și ecuația a treia dacă determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

este nul. Dacă scriem soluțiile în modul următor

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t,$$

t fiind parametru, condiția ca $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ nu mai este necesară.

Avem deci următoarea

T e o r e m ă. Un sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute, omogen admite și alte soluții în afară de cea banală dacă determinantul sistemului este nul.

4. Determinanți de ordinul al treilea

Rezultatele precedente arată că și pentru sisteme de trei ecuații liniare introducerea noțiunii de determinant este binevenită.

Numărul

$$D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

îl vom numi determinant de ordinul al treilea şi îl vom nota

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Acelaşi număr D_3 este dat şi de

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{2}$$

sau de

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{3}$$

dacă ţinem seama de valorile determinanţilor de ordinul doi ce intervin; (2) este dezvoltarea determinantului (1) după linia întîi, iar (3) este dezvoltarea determinantului (1) după coloana întîi.

Un determinant de ordinul al treilea are $3^2 = 9$ elemente aşezate pe trei linii şi trei coloane. Elementul a_{ij} se găseşte pe linia i şi coloana j; astfel, a_{23} se găseşte pe linia a doua şi coloana a treia. Elementele a_{ii}, respectiv a_{11}, a_{22}, a_{33} se găsesc pe *diagonala principală*.

Determinantul de ordinul al doilea

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ce se obţine suprimînd linia întîi şi coloana întîi, adică linia şi coloana pe care se găseşte a_{11}, se numeşte *minorul* lui a_{11}. În mod asemănător se defineşte minorul unui element oarecare a_{ij}.

Cele şase proprietăţi stabilite pentru determinanţii de ordinul al doilea se menţin şi pentru determinanţii de ordinul al treilea.

Exemple

1) Să calculăm valoarea determinantului

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Avem } D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 15 + 1 - 42 + 4 - 21 - 30 = -73.$$

Determinantul a fost dezvoltat după linia întîi.

2) Să calculăm valoarea determinantului (Vandermonde)

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Scădem coloana întîi din coloana a doua și a treia; conform proprietății 6, valoarea determinantului nu se schimbă

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

Conform proprietății 4, putem da factor comun pe $(b-a)(c-a)$, deci

$$V_3 = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

3) Să se arate că

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0, \text{ fără să se dezvolte.}$$

Dacă adunăm linia a doua la a treia, determinantul nu-și schimbă valoarea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3. DETERMINANȚI DE ORDINUL *n*

1. Definiție. Proprietăți

Fie a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, n^2 numere; cu ajutorul lor să formăm un tabel pătratic, numit *matrice*,

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right\|$$

cu n linii și n coloane; elementul a_{ij} se găsește pe linia i și coloana j. Unei astfel de matrice i se asociază un număr numit *determinant de ordinul n*, care se notează

$$D_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|;\ \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

și care se definește prin

$$| A | = \sum (-1)^{I+I'} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n} , \tag{1}$$

suma fiind extinsă la *toate permutările distincte* de ordinul n $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$, înțelegîndu-se prin aceasta *toate monoamele distincte*

$$a_{i_1 j_1} \; a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}, \tag{2}$$

cu $i, j = 1, 2, \ldots, n$, I și I' fiind numărul de inversiuni al permutărilor $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, respectiv.

Deoarece, dacă permutăm într-un monom (2) pe $a_{i_\alpha j_\alpha}$ cu $a_{i_\beta j_\beta}$, monomul rămîne același, iar suma $I + I'$ își păstrează paritatea, urmează că putem să ne aranjăm în așa fel ca permutarea $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ sau permutarea $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ să fie ordinea naturală, deci

$$| A | = \sum (-1)^{I'} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}$$

sau

$$| A | = \sum (-1)^{I} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} ,$$

suma Σ fiind extinsă la cele $n!$ permutări ale lui $j_1, j_2, \ldots, j_n$ sau, respectiv, $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Deci în dezvoltarea unui determinant de ordinul n intervin $n!$ termeni de forma (2).

Exemple

1) Determinantul de ordinul al doilea

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

dezvoltat după regula de mai sus are valoarea $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ și conține $2! = 2$ termeni.

2) Determinantul de ordinul al treilea

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

dezvoltat după regula de mai sus are valoarea

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

și este aceeași cu (3), dată la aliniatul precedent.

Din însăși definiția determinantului de ordinul n rezultă următoarele proprietăți:

Proprietatea 1. Un determinant își schimbă semnul dacă permutăm elementele a două linii sau două coloane între ele.

Într-adevăr, dacă permutăm în determinantul de ordinul n, D_n, linia i_α cu linia i_β, obținem un determinant D'_n care are dezvoltarea

$$D'_n = \sum (-1)^{I} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} ,$$

în care fiecare permutare $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ este de clasă diferită față de permutarea termenului corespunzător din determinantul inițial, deoarece s-au schimbat între ele două elemente ale permutării; prin urmare, toții termenii ce intervin în dezvoltarea lui D'_n sînt egali cu termenii corespunzători din dezvoltarea lui D_n, însă cu semn schimbat, deci

$$D'_n = -D_n.$$

P r o p r i e t a t e a 2. Dacă într-un determinant schimbăm toate liniile cu coloanele de același rang, determinantul nu se schimbă.

Avem

$$D_n = \sum (-1)^{I+I'} a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \ldots a_{i_nj_n}$$

și a schimba toate liniile cu coloanele de același rang înseamnă a permuta șirul de indici $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ cu șirul de indici $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Cum și indicii i, și indicii j parcurg șirul $(1, 2, \ldots, n)$ și prin aceasta numărul I se schimbă cu I', deci suma $I + I'$ rămîne constantă, urmează că D_n nu se schimbă. Să notăm cu D^* determinantul obținut prin schimbarea tuturor liniilor cu coloanele de același rang; se numește determinantul transpus al determinantului D_n și se notează D_n^*; avem deci

$$D_n^* = D_n.$$

Acest rezultat are o consecință importantă, și anume că orice proprietate relativă la liniile unui determinant va fi valabilă și pentru coloane.

P r o p r i e t a t e a 3. Un determinant este nul dacă are două linii sau două coloane egale.

Să presupunem în D_n că elementele liniei i_α sînt egale cu elementele liniei i_β. Dacă permutăm aceste două linii între ele, obținem un determinant D'_n egal cu cel inițial, deoarece elementele celor două linii sînt egale. În virtutea proprietății 1, determinantul D'_n este egal și de semn contrar cu D_n; prin urmare, avem simultan

$$D_n = D'_n$$
$$D_n = -D'_n,$$

deci

$$2D_n = 0, \quad D_n = 0.$$

2. Determinanți minori

Din dezvoltarea unui determinant de ordinul n

$$D_n = \sum (-1)^{I'} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

urmează că fiecare monom conține un element al primei linii și numai unul

singur, prin urmare D_n se poate scrie ca o expresie liniară în elementele primei linii

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}, \tag{1}$$

unde A_{1k}, coeficientul lui a_{1k}, este o sumă de produse în a_{ij} de grad $n-1$, produse care nu conțin nici un element al primei linii, deci $i \neq 1$.

Rezultatul este adevărat pentru elementele oricărei linii sau coloane, deci putem scrie

$$D_n = a_{k1}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ik} \tag{2}$$

sau

$$D_n = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}. \tag{3}$$

Spunem că în (1) avem dezvoltarea determinantului D_n după linia întîi, în (2) după linia k, iar în (3) după coloana k.

Să găsim pe A_{11}. Conform celor spuse mai sus, A_{11} este definit de

$$a_{11}A_{11} = \sum (-1)^{I'} a_{11}a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a_{11} \sum (-1)^{I'} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

deci

$$A_{11} = \sum (-1)^{I'} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \tag{4}$$

unde I' este numărul de inversiuni ale permutării $(1, j_2, \dots, j_n)$, care este egal cu numărul de inversiuni ale permutării

$$(j_2, j_3, \dots, j_n),$$

deoarece suprimarea lui 1 nu schimbă pe I'. Expresia (4) a lui A_{11} arată că A_{11} este un determinant de ordinul $n-1$, $j_2, j_3, \dots, j_n$ luînd toate valorile lui $2, 3, \dots, n$; prin urmare, A_{11} este determinantul de ordinul $n-1$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

ce se obține suprimînd din D_n linia și coloana întîi, adică linia și coloana pe care se găsește a_{11}.

Determinantul A_{11} se numește *complementul algebric* al lui a_{11}.

Să găsim acum *complementul algebric* al lui a_{ij}, adică pe A_{ij}.

Vom proceda la fel ca pentru a_{11}. Vom aduce mai întîi pe a_{ij} în locul lui a_{11}, ceea ce necesită $i-1$ și $j-1$ schimbări de semn, deoarece această operație se realizează efectuînd $i-1$ schimbări de linii și $j-1$ schimbări de coloane, deci

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij},$$

unde, de data aceasta, Δ_{ij} este determinantul ce se obține din D_n suprimînd linia i și coloana j. Determinantul Δ_{ij} obținut în acest mod se numește *determinantul minor* al elementului a_{ij}.

Revenind acum la dezvoltarea determinantului D_n după o linie sau coloană, avem:

1) $D_n = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\Delta_{1n}$,

numită dezvoltarea determinantului D_n după linia întîi.

2) $D_n = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1}\Delta_{n1}$,

numită dezvoltarea determinantului D_n după coloana întîi.

3) $D_n = (-1)^{k+1}[a_{1k}\Delta_{1k} - a_{2k}\Delta_{2k} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{nk}\Delta_{nk}]$,

numită dezvoltarea determinantului D_n după coloana k, și

4) $D_n = (-1)^{k+1}[a_{k1}\Delta_{k1} - a_{k2}\Delta_{k2} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{kn}\Delta_{kn}]$,

care este dezvoltarea determinantului D_n după linia k.

Să presupunem că în D_n linia i și linia k sînt egale; atunci $D_n = 0$; dezvoltînd după linia i și ținînd seama că $a_{ij} = a_{kj}$, obținem

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad i \neq k. \tag{5}$$

În mod asemănător, dacă coloana j este egală cu coloana k, $D_n = 0$, deci

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0, \quad j \neq k. \tag{6}$$

Regula de însumare tensorială. Folosind semnul Σ, relația (5) se scrie

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0, \quad i \neq k. \tag{5'}$$

În mod asemănător se scrie și relația (6)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0, \quad j \neq k. \tag{6'}$$

De obicei se suprimă și semnul Σ, adică putem scrie pe (5′) și (6′) numai sub forma

$$a_{ij}A_{kj} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq k,$$

sau

$$a_{ij}A_{ik} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j \neq k,$$

cu convenția ca însumarea să se facă relativ la indicele i, care prezintă particularitatea că *se repetă în monom.*

Dacă mai introducem și simbolul (lui Kronecker) δ_{ij}, care pentru $i \neq j$, $\delta_{ij} = 0$, iar pentru $i = j$, $\delta_{ii} = 1$, putem scrie relațiile de mai sus astfel:

$$a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik}D_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

și (7)

$$a_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}D_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dezvoltarea unui determinant după elementele unei linii sau coloane ne permite să stabilim noi proprietăți ale determinanților.

Proprietatea 4. Un determinant se înmulțește cu un număr dacă toate elementele unei linii sau coloane se înmulțesc cu acel număr.

Acest fapt rezultă imediat din dezvoltarea unui determinant după elementele unei linii sau coloane. Dacă, de exemplu, considerăm dezvoltarea unui determinant după linia întîi, avem

$$\lambda D_n = (\lambda a_{11}) A_{11} + (\lambda a_{12}) A_{12} + \ldots + (\lambda a_{1n}) A_{1n}.$$

O consecință a acestei proprietăți este faptul că, dacă un determinant are două linii (coloane) proporționale, determinantul este nul.

Proprietatea 5. Dacă într-un determinant elementele unei linii sau coloane sînt sume de k numere, atunci determinantul se scrie ca sumă de k determinanți.

Să presupunem că elementele primei linii a_{1i} sînt sume de două numere $a_{1i} = a'_{1i} + a''_{1i}$

$$D_n = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \ldots & a'_{1n} + a''_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinant care dezvoltat după linia întîi are valoarea

$$D_n = (a'_{11} + a''_{11}) A_{11} + (a'_{12} + a''_{12}) A_{12} + \ldots + (a'_{1n} + a''_{1n}) A_{1n}$$

sau

$$D_n = a'_{11}A_{11} + a'_{12}A_{12} + \ldots + a'_{1n}A_{1n} + a''_{11}A_{11} + a''_{12}A_{12} + \ldots + a''_{1n} A_{1n},$$

deci

$$D_n = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \ldots & a''_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pentru $k > 2$ se demonstrează în mod asemănător.

Proprietatea 6. Într-un determinant, dacă adunăm la elementele unei linii (sau coloane) elementele celorlalte linii (sau coloane) înmulțite cu numere oarecare, determinantul nu-și schimbă valoarea.

Dacă în $D_n = |a_{ij}|$ adunăm, de exemplu, la linia întîi elementele liniei a doua înmulțite cu numărul λ, obținem determinantul D'_n

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & \ldots & a_{1n} + \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

care, conform proprietății 5, se descompune într-o sumă de doi determinanți

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

deci $D'_n = D_n$, deoarece ultimul determinant e nul, avînd linia întîi și a doua egale.

Proprietatea 7. Un determinant este nul dacă o linie (sau coloană) a sa este o combinație liniară de celelalte linii (sau coloane).

Spunem că în determinantul $D_n = | a_{ij} |$ linia întîi este o combinație liniară a celorlalte linii dacă

$$a_{1i} = \sum_{k=2}^{n} a_{ki} \lambda_k, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

λ_k fiind numere nu toate nule (adică $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0$).

Conform proprietății 5, un astfel de determinant se descompune într-o sumă de $n - 1$ determinanți și fiecare din acești $n - 1$ determinanți are două linii proporționale, deci toți sînt nuli.

Aplicații

1) Să se calculeze determinantul

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

numit *diagonal*; dezvoltat după linia întîi, obținem

$$D_n = a_{11} D_{n-1},$$

unde D_{n-1} este tot un determinant diagonal, deci $D_n = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

2) Să se calculeze valoarea determinantului lui Vandermonde

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

punînd rezultatul sub formă de produs de factori.

Înmulțim fiecare linie cu a_1 și o scădem din cea următoare:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

determinant care dezvoltat după prima coloană dă

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) V_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n), \tag{8}$$

unde $V_{n-1}(a_2, \ldots, a_n)$ este tot un determinant Vandermonde. Relația (8) este de fapt o formulă de recurență. În mod analog

$$V_{n-1}(a_2, \ldots, a_n) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \ldots (a_n - a_2) V_{n-2}(a_3, a_4, \ldots, a_n),$$

astfel încît obținem

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j>i=1}^{n} (a_j - a_i),$$

înțelegîndu-se prin $\prod\limits_{j>i=1}^{n} (a_j - a_i)$ produsul tuturor binoamelor $(a_j - a_i), j > i$, distincte, cu $i, j = 1, 2, \ldots, n$, în număr de $\frac{n(n-1)}{2}$; V_n este diferit de zero dacă $a_i \neq a_j$.

3) Determinantul cu elementele a_{ij} numere complexe

$$D_n = |a_{ij}| \quad \text{și} \quad a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

este real. Deoarece $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, urmează că elementele simetrice față de diagonala principală sînt conjugate. Elementele de pe diagonala principală sînt reale, deoarece $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$. Conjugatul lui D_n este

$$\overline{D}_n = |\bar{a}_{ij}| = |a_{ji}| = D_n^*,$$

însă D_n^* este egal cu D_n, deci

$$\overline{D}_n = D_n^* = D_n.$$

Prin urmare, D_n este real.

Exemple

1) Să se calculeze determinantul

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Adunăm coloana întîi înmulțită cu —2, —3, —4 la coloana a doua, a treia și a patra; avem

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -7 & -11 \\ -1 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & -3 & -3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -7 & -11 \\ 3 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Adunăm coloana întîi înmulțită cu —7, —11 la coloana a doua și a treia

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -15 & -27 \\ 3 & -18 & -24 \end{vmatrix} = 15 \cdot 24 - 18 \cdot 27 = -126.$$

2) Să se calculeze

$$D_4 = \begin{vmatrix} \sin^3 x_1 & \sin^2 x_1 \cos x_1 & \sin x_1 \cos^2 x_1 & \cos^3 x_1 \\ \sin^3 x_2 & \sin^2 x_2 \cos x_2 & \sin x_2 \cos^2 x_2 & \cos^3 x_2 \\ \sin^3 x_3 & \sin^2 x_3 \cos x_3 & \sin x_3 \cos^2 x_3 & \cos^3 x_3 \\ \sin^3 x_4 & \sin^2 x_4 \cos x_4 & \sin x_4 \cos^2 x_4 & \cos^3 x_4 \end{vmatrix}$$

Împărțind linia întîi cu $\sin^3 x_1$ linia a doua cu $\sin^3 x_2$ etc., obținem

$$D_4 = \sin^3 x_1 \sin^3 x_2 \sin^3 x_3 \sin^3 x_4 \cdot V_4 (\operatorname{ctg} x_1, \operatorname{ctg} x_2, \operatorname{ctg} x_3, \operatorname{ctg} x_4),$$

unde V_4 este determinantul lui Vandermonde,

$$V_4 = \prod_{j>i=1}^{4} (\operatorname{ctg} x_j - \operatorname{ctg} x_i) = \prod_{j>i=1}^{4} \frac{\sin (x_i - x_j)}{\sin x_i \sin x_j},$$

deci

$$D_4 = \prod_{j>i=1}^{4} \sin (x_i - x_j).$$

3) Să se calculeze valoarea determinantului (circulant)

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_n & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_3 & x_4 & \dots & x_2 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_1 \end{vmatrix}$$

Se găsește $D_n = \prod_{h=0}^{n-1} (x_1 + \varepsilon^h x_2 + \varepsilon^{2h} x_3 + \dots + \varepsilon^{(n-1)h} x_n)$, unde ε este o rădăcină complexă a ecuației $\varepsilon^n = 1$.

§ 4. REGULA LUI LAPLACE

1. Determinanți minori de diverse ordine

Am văzut la aliniatul precedent cum se găsește în dezvoltarea unui determinant $D_n = | a_{ij} |$ coeficientul lui a_{ij}.

În continuare, vom căuta să aflăm coeficientul lui $a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} \dots a_{i_p j_p}$.

Să calculăm mai întîi coeficientul lui $a_{11} a_{22}$, pe care îl notăm cu $A_{12;22}$. Avem, din dezvoltarea determinantului D_n,

$$a_{11} a_{22} \cdot A_{12;12} = \sum (-1)^I a_{11} a_{22} a_{3j_3} a_{4j_4} \dots a_{nj_n},$$

deci

$$A_{12;12} = \sum (-1)^I a_{3j_3} a_{4j_4} \dots a_{nj_n},$$

unde $(j_3, j_4, \ldots, j_n)$ este o permutare a numerelor 3, 4, ..., n, iar I este numărul de inversiuni ale permutării $(1, 2, j_3, j_4, \ldots, j_n)$, care este același cu numărul de inversiuni ale permutării $(j_3, j_4, \ldots, j_n)$, deoarece suprimarea elementelor (1, 2) nu schimbă pe I. Prin urmare, $A_{12;12}$ este un determinant de ordinul $n-2$, și anume

$$A_{12;12} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \ldots a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} \ldots a_{4n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n3} & a_{n4} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

ce se obține din determinantul D_n suprimînd linia întîi și a doua, coloana întîi și a doua, adică tocmai liniile și coloanele pe care se găsesc elementele a_{11} și a_{22}.

Invers, dacă căutăm coeficientul lui $A_{12;12}$, din dezvoltarea lui D_n, găsim, în afară de $a_{11}a_{22}$, și pe $-a_{12}a_{21}$, deci $A_{12;12}$ are coeficient pe

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12;12}.$$

Determinantul $a_{12;12}$ se obține din D_n, suprimînd toate liniile și coloanele aparținînd lui $A_{12;12}$. Determinanții $A_{12;12}$, $a_{12;12}$ se numesc *minori complementari* de ordinul $n-2$ și 2, respectiv ($A_{12;12}$ este minorul complementar al determinantului $a_{12;12}$ și reciproc), iar produsul lor $a_{12;12} \cdot A_{12;12}$ intervine în dezvoltarea determinantului D_n. Dacă căutăm acum coeficientul lui $a_{ij}a_{pq}$, procedăm în mod asemănător. Aducem mai întîi pe a_{ij} în locul lui a_{11}, ceea ce necesită $i-1+j-1$ schimbări de semn; aducem apoi pe a_{pq} în locul lui a_{22}, ceea ce necesită $p-2+q-2$ schimbări de semn; în total, $i+j+$ $+p+q$ schimbări de semn. Coeficientul căutat $A_{ip;jq}$ va fi deci

$$(-1)^{i+j+p+q}\,\Delta_{ip;jq},$$

unde $\Delta_{ip;jq}$ este determinantul de ordinul $n-2$ ce se obține din D_n suprimînd liniile i, p și coloanele j, q. Invers, dacă căutăm coeficientul lui $A_{ip;jq}$, din dezvoltarea determinantului D_n găsim determinantul de ordinul doi

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{iq} \\ a_{pj} & a_{pq} \end{vmatrix} = a_{ip;jq},$$

care se obține din determinantul D_n, suprimînd liniile și coloanele care aparțin lui $\Delta_{ip;jq}$. Determinantul $\Delta_{ip;jq}$ de ordinul $n-2$ se numește *determinantul minor* al determinantului $a_{ip;jq}$, iar

$$A_{ip;jq} = (-1)^{i+p+j+q}\,\Delta_{ip;jq}$$

se numește *complementul algebric* al determinantului $a_{ip;jq}$ și produsul lor $a_{ip;jq} \cdot A_{ip;jq}$ intervine în dezvoltarea determinantului D_n.

În general, dacă căutăm coeficientul $A_{12\dots p;12\dots p}$ al lui $a_{11}a_{22}\dots a_{pp}$ din dezvoltarea lui D_n, găsim că este determinantul de ordinul $n-p$ ce se obține din D_n suprimînd liniile $1, 2, \dots, p$ și coloanele $1, 2, \dots, p$, deci

$$A_{12\dots p;12\dots p} = \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} & a_{p+1,p+2} & \dots & a_{p+1,n} \\ a_{p+2,p+1} & a_{p+2,p+2} & \dots & a_{p+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,p+1} & a_{n,p+2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Invers, dacă căutăm în dezvoltarea lui D_n coeficientul lui $A_{12\dots p;12\dots p}$, găsim determinantul $a_{12\dots p;12\dots p}$

$$a_{12\dots p;12\dots p} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

și produsul $a_{12\dots p;12\dots p}\, A_{12\dots p;12\dots p}$ intervine în dezvoltarea determinantului D_n. Determinantul $A_{12\dots p;12\dots p}$ se numește *minorul de ordinul* $n-p$ al determinantului $a_{12\dots p;12\dots p}$.

Dacă căutăm acum coeficientul lui $a_{i_1j_1}\, a_{i_2j_2}\dots a_{i_pj_p}$ din dezvoltarea lui D_n, aducem pe $a_{i_1j_1}$ în locul lui a_{11}, pe $a_{i_2j_2}$ în locul lui a_{22} ş.a.m.d., pe $a_{i_pj_p}$ în locul lui a_{pp}, ceea ce necesită

$$i_1 + i_2 + \dots + i_p + j_1 + j_2 + \dots + j_p - 1 - 2 - \dots - p - 1 - 2 - \dots - p$$

schimbări de semn, deci coeficientul căutat $A_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p}$ este

$$(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}(i_k+j_k)}\, \Delta_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_q} = A_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p},$$

unde $\Delta_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p}$ este determinantul de ordinul $n-p$ ce se obține din D_n suprimînd liniile $i_1, i_2, \dots, i_p$ și coloanele $j_1, j_2, \dots, j_p$.

Invers, dacă căutăm în dezvoltarea lui D_n coeficientul lui $A_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p}$, găsim determinantul $a_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p}$ ce se obține din D_n cu liniile $i_1, i_2, \dots, i_p$ și coloanele $j_1, j_2, \dots, j_p$.

Determinantul $\Delta_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p}$ se numește *minorul de ordinul* $n-p$ al determinantului $a_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p}$, iar $A_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p}$ se numește *complementul algebric al determinantului* $a_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p}$ și produsul

$$a_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p} \cdot A_{i_1i_2\dots i_p;j_1j_2\dots j_p}$$

ntervine în dezvoltarea determinantului D_n.

2. Regula lui Laplace

Am văzut mai sus că produsul dintre un determinant minor din D_n şi complementul său algebric conţine numai termeni ce aparţin lui D_n. Acest fapt stă la baza demonstrării următoarei teoreme, datorită lui Laplace:

Teorema lui Laplace. Un determinant este egal cu suma tuturor produselor dintre determinanţii minori formaţi cu elementele a p linii (sau coloane) date cu complementele lor algebrice.

Demonstraţie. Fie liniile $i_1, i_2, \ldots, i_p$; minorii ce se pot forma cu aceste p linii sînt

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_p; k_1 k_2 \ldots k_p},$$

$k_1, \ldots, k_p$ fiind p coloane oarecare din D_n. Numărul lor este $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Fie de asemenea

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_p; k_1 k_2 \ldots k_p}$$

complementele lor algebrice. Deoarece $a_{i_1 i_2 \ldots i_p; k_1 k_2 \ldots k_p}$ diferă între ei cel puţin printr-o coloană, termenii produselor

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_p; k_1 k_2 \ldots k_p} A_{i_1 i_2 \ldots i_p; k_1 k_2 \ldots k_p}$$

sînt diferiţi între ei. Fiecare produs conţine $p!\ (n-p)!$ termeni din D_n şi suma

$$\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_p; k_1 k_2 \ldots k_p} A_{i_1 i_2 \ldots i_p; k_1 k_2 \ldots k_p} \tag{1}$$

conţine $\frac{n!}{p!(n-p)!} p!(n-p)! = n!$ termeni distincţi din D_n, deci este egală cu D_n.

Regula (1), care dă dezvoltarea unui determinant după minorii formaţi cu p linii (sau coloane), se numeşte *regula lui Laplace.* Se vede imediat că dacă $p = 1$, obţinem dezvoltarea unui determinant după o linie sau coloană.

Exemple

1) Pentru un determinant de ordinul patru avem următoarea dezvoltare după primele două linii

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

Semnul produsului $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ se obţine adunînd indicii elementelor de pe diagonala principală la unul din minorii ce intervin în produs

$$(-1)^{1+1+2+2} \quad \text{sau} \quad (-1)^{3+3+4+4}.$$

2) Să se calculeze

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

Dezvoltînd după regula lui Laplace, avem

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ -b & -d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ -b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & a \\ -c & b \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b & c \\ a & -d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -c & -b \\ -d & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -c & a \\ -d & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ -d & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{vmatrix}$$

$$D_4 = (a^2 + b^2)^2 + (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 + (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 +$$
$$+ (c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

3. Produsul a doi determinanţi

Produsul a doi determinanţi de acelaşi ordin n, $A_n = |a_{ij}|$, $B_n = |b_{ij}|$ se poate scrie totdeauna ca un determinant de ordinul $2n$ deoarece, dacă punem

$$\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} A_n & O_n \\ X_n & B_n \end{vmatrix}$$

unde O_n este un determinant de ordinul n cu toate elementele nule iar X_n este un determinant de ordinul n, arbitrar, şi dezvoltînd după regula lui Laplace, obţinem

$$\Delta_{2n} = A_n \cdot B_n .$$

Să luăm acum pentru X_n determinantul

$$X_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Atunci produsul

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right|$$

se poate scrie ca un determinant de ordinul n. Într-adevăr, dacă înmulţim linia $n+1$ cu a_{11}, linia $n+2$ cu a_{12} ş.a.m.d., linia $2n$ cu a_{1n} şi le adunăm toate la linia întîi, dacă înmulţim apoi linia $n+1$ cu a_{21}, linia $n+2$ cu a_{22} ş.a.m.d., linia $2n$ cu a_{2n} şi le adunăm toate la linia a doua, în general dacă înmulţim linia $n+1$ cu a_{k1}, linia $n+2$ cu a_{k2} ş.a.m.d., linia $2n$ cu a_{kn} şi adunăm totul la linia k, $k = 1, 2, \dots, n$, obţinem determinantul

$$A_n,\ B_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

unde $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Dacă-l dezvoltăm după regula lui Laplace, obţinem

$$|a_{ij}| \cdot |b_{ij}| = (-1)^{n^2} |C_{ij}| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = |C_{ij}|,$$

deoarece $(-1)^{n^2+n} = 1$.

O b s e r v a ţ i i

1) Deoarece un determinant nu-şi schimbă valoarea prin transpunere, obţinem încă trei forme pentru produsul a doi determinanţi, după cum înlocuim pe $|a_{ij}|$ sau $|b_{ij}|$ cu transpuşii lor $|a_{ji}|$ sau $|b_{ji}|$.

2) Produsul a doi determinanţi A_n, B_m, $m > n$ se poate scrie totdeauna ca un determinant de ordinul n, observînd că un determinant de ordinul m se scrie ca un determinant de ordinul n, în modul următor

$$B_m = \begin{vmatrix} B_m & 0 \\ 0 & C_{n-m} \end{vmatrix}$$

unde

$$C_{n-m} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicații și exemple

1) Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{1}$$

pătratul determinantului Vandermonde $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{ este } \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

și se numește discriminantul ecuației (1); în V_n^2, $S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$. Discriminantul este diferit de zero numai dacă toate rădăcinile sînt distincte. Pentru $n = 2$, V_n^2 este discriminantul ecuației de gradul al doilea $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$. Într-adevăr

$$V_2^2 = S_0 S_2 - S_1^2 = 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = a_1^2 - 4a_2.$$

Pentru $n = 3$, $V_3^2 = 27 a_3^2 + 4a_2^3$ este discriminantul ecuației $x^3 + a_2 x + a_3 = 0$.

2) Se numește determinant adjunct al determinantului $D_n = |a_{ij}|$ determinantul Δ_n

$$\Delta_n = |A_{ij}|,$$

unde A_{ij} este complementul algebric al lui a_{ij}. Făcînd produsul $D_n \Delta_n$ și ținînd seama de relațiile (A. cap. III. § 2, al. 3)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} D_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} D_n,$$

obținem

$$D_n \Delta_n = \begin{vmatrix} D_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_n & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_n \end{vmatrix} = D_n^n, \text{ deci } \Delta_n = D_n^{n-1}.$$

3) Determinantul $\Delta_n' = \left| \dfrac{A_{ji}}{D_n} \right|$, $D_n \neq 0$, se numește reciprocul determinantului D_n; avem, ținînd seama de valoarea determinantului $|A_{ji}|$,

$$\Delta_n' = \frac{D_n^{n-1}}{D_n^n} = \frac{1}{D_n} = D_n^{-1}.$$

Cîtul $\dfrac{A_{ij}}{D_n}$ se numește minorul normalizat al lui a_{ij}.

4) O transformare liniară

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

se numește ortonormală dacă

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \tag{2}$$

Pătratul determinantului transformării $|a_{ij}|^2$ este

$$|a_{ij}|^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

deci totdeauna $|a_{ij}| \neq 0$ dacă sînt îndeplinite condițiile (2).

În plan, transformările ortonormale sînt rotațiile

$$y_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta$$
$$y_2 = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$

și determinantul transformării este unitatea.

5) Să calculăm pătratul determinantului

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$$

$$D_3^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & bc & ac \\ bc & a^2 + c^2 & ab \\ ac & ab & b^2 + c^2 \end{vmatrix}$$

de unde rezultă imediat că valoarea determinantului obținut este $4a^2 b^2 c^2$.

§ 5. MATRICE

1. Matrice dreptunghiulare

Fie a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $m \times n$ numere. Se numește matrice $m \times n$ tabloul dreptunghiular

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \| a_{ij} \|,$$

cu m linii și n coloane; a_{ij} se numesc elementele matricei.

Două matrice $m \times n$, $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ sînt egale dacă $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Între două matrice care nu au acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane egalitatea nu poate fi definită.

Adunarea matricelor. Suma a două matrice $m \times n$, $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, este matricea

$$\|a_{ij} + b_{ij}\|$$

şi se notează $A + B$.

1) Adunarea matricelor este comutativă

$$A + B = B + A,$$

deoarece $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$.

2) Adunarea matricelor este asociativă

$$(A + B) + C = A + (B + C), \qquad C = \|c_{ij}\|,$$

deoarece

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}.$$

3) Elementul neutru faţă de adunare este matricea 0 (zero), care are m linii şi n coloane, cu toate elementele nule

$$0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} = \|0\|;$$

avem

$$A + 0 = \|a_{ij}\| + \|0\| = \|a_{ij} + 0\| = \|a_{ij}\| = A.$$

4) La orice matrice $m \times n$, $A = \|a_{ij}\|$ există o matrice opusă $-A = \|-a_{ij}\|$, încît

$$A + (-A) = 0.$$

Într-adevăr

$$A + (-A) = \|a_{ij}\| + \|-a_{ij}\| = \|a_{ij} - a_{ij}\| = \|0\|.$$

Proprietăţile enunţate mai sus arată că mulţimea matricelor cu elemente în R (sau C) şi *cu acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane* formează *grup abelian* faţă de operaţia adunare.

Înmulţirea a două matrice dreptunghiulare $A \times B$, unde

$$A = \|a_{ij}\|, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$B = \|b_{hk}\|, \qquad h = 1, 2, \ldots, p; \quad h = 1, 2, \ldots, q,$$

nu este definită decît dacă $p = n$, adică numărul coloanelor matricei A este

egal cu numărul liniilor matricei B. Dacă această condiţie este îndeplinită, produsul $A \times B$ este o matrice

$$A \times B = \| c_{ik} \|,$$

unde $c_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kh}$, deci $A \times B$ este o matrice $m \times q$.

Produsul $B \times A$ nu este definit decît dacă $m = q$.

2. Matrice pătrate

O matrice $n \times n$ se numeşte *matrice pătrată* de ordinul n.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix} = \| a_{ij} \|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

O matrice pătrată de ordinul n are n linii şi n coloane. Elementul a_{ij} se găseşte pe linia i şi coloana j. Elementele a_{ii} se găsesc pe diagonala principală.

Să demonstrăm următoarea

T e o r e m ă. Mulţimea matricelor pătrate de ordinul n cu elemente în R (sau C) formează un inel (necomutativ) **faţă de operaţiile de adunare şi înmulţire.**

Vom nota mulţimea matricelor pătrate de ordinul n cu elemente în R (sau C) cu $\mathfrak{M}_n$.

Mulţimea $\mathfrak{M}_n$ formează *grup comutativ* faţă de operaţia de adunare. Într-adevăr:

$$\text{dacă } A = \| a_{ij} \| \in \mathfrak{M}_n, \qquad B = \| b_{ij} \| \in \mathfrak{M}_n,$$

avem proprietăţile:

S_1. $$A + B = \| a_{ij} + b_{ij} \| \in \mathfrak{M}_n.$$

S_2. Adunarea este comutativă

$$A + B = B + A,$$

întrucît $\| a_{ij} + b_{ij} \| = \| b_{ij} + a_{ij} \|$, deoarece adunarea în R este comutativă.

S_3. Adunarea este asociativă.

Dacă $A \in \mathfrak{M}_n, \quad B \in \mathfrak{M}_n, \quad C \in \mathfrak{M}_n,$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

avem

$$(\| a_{ij} \| + \| b_{ij} \|) + \| c_{ij} \| = \| a_{ij} + b_{ij} \| + \| c_{ij} \| = \| a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \|$$

şi

$$\|a_{ij}\| + (\|b_{ij}\| + \|c_{ij}\|) = \|a_{ij}\| + \|b_{ij} + c_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\|.$$

S_4. Elementul neutru este matricea 0 de ordinul n cu toate elementele zero

$$0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ . & . . . . \\ 0 & 0 \dots 0 \end{Vmatrix} \in \mathfrak{M}_n$$

$$A + 0 = \|a_{ij}\| + \|0\| = \|a_{ij} + 0\| = \|a_{ij}\|.$$

S_5. Pentru orice $A \in \mathfrak{M}_n$ există opusul $-A = \|-a_{ij}\|$, astfel încît

$$A + (-A) = 0,$$

deoarece $A + (-A) = \|a_{ij}\| + \|-a_{ij}\| = \|a_{ij}\| + \|(-a_{ij})\| = \|0\|$.

Mulţimea $\mathfrak{M}_n$ formează *semigrup necomutativ* faţă de operaţia înmulţire. Într-adevăr:
dacă $A = \|a_{ij}\| \in \mathfrak{M}_n$, $B = \|b_{ij}\| \in \mathfrak{M}_n$, avem proprietăţile:

T_1. $$A \times B = \left\|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right\| \in \mathfrak{M}_n \cdot$$

Se observă că produsul a două matrice nu este comutativ, deoarece

$$B \times A = \left\|\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}\right\| \neq A \times B,$$

deoarece, în general, $\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \neq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ (v. exemplul 1).

În produsul $A \times B$ spunem că am înmulţit la stînga matricea B cu matricea A sau că am înmulţit la dreapta matricea A cu matricea B.

T_2. Produsul este asociativ

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C), \quad A = \|a_{ij}\| \in \mathfrak{M}_n, \quad B = \|b_{ij}\| \in \mathfrak{M}_n,$$
$$C = \|c_{ij}\| \in \mathfrak{M}_n.$$

Avem

$$(A \times B) \times C = \left\|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right\| \cdot \|c_{ij}\| = \left\|\sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kh}\right) c_{hj}\right\|,$$

însă

$$\left\|\sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kh}\right) c_{hj}\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{h=1}^{n} b_{kh} c_{hj}\right)\right\| = A \times (B \times C).$$

T_3. Elementul neutru în $\mathfrak{M}_n$ este matricea unitate U de ordinul n

$$U = \| \delta_{ij} \|, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \text{(simbolul lui Kronecker)}$$

sau

$$U = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ . & . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{Vmatrix}$$

În adevăr

$$A \times U = U \times A = A,$$

deoarece, conform regulii de înmulțire a două matrice, avem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj} = a_{i1} \delta_{1j} + a_{i2} \delta_{2j} + \dots + a_{ij} \delta_{jj} + \dots a_{in} \delta_{nj} = a_{ij}$$

și

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = \delta_{i1} a_{1j} + \delta_{i2} a_{2j} + \dots + \delta_{ij} a_{ij} + \dots + \delta_{in} a_{nj} = a_{ij}.$$

T_4. Produsul este distributiv față de operația adunare

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$$

Avem

$$A \times (B + C) = \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \Big\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \Big\|,$$

însă

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Big\| = A \times B, \quad \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \Big\| = A \times C,$$

deci

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C, \qquad A \in \mathfrak{M}_n, \ B \in \mathfrak{M}_n, \ C \in \mathfrak{M}_n.$$

Am arătat astfel că mulțimea $\mathfrak{M}_n$ a matricelor pătrate de ordinul n formează un inel necomutativ.

Exemple

1) Să se calculeze produsul $A \times B$ şi $B \times A$ pentru matricele

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} m & n \\ p & q \end{Vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{Vmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{Vmatrix}, \qquad B \times A = \begin{Vmatrix} ma + nc & mb + nd \\ pa + qc & pb + qd \end{Vmatrix}$$

Se verifică deci că $A \times B \neq B \times A$.

2) Produsul matricelor

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ c-a & a-b & b-c \\ b-c & c-a & a-b \end{Vmatrix}$$

este matricea

$$0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Matricele A şi B se numesc *divizori ai lui zero*, deoarece, deşi $A \neq 0$, $B \neq 0$, produsul $A \times B$ este matricea 0.

3. Determinantul unei matrice pătrate

Fiind dată o matrice pătrată de ordinul n, $A = \|a_{ij}\|$ cu elemente în R (sau C), determinantul $|a_{ij}| = \det A$ se numeşte determinantul matricei A.

O matrice A se numeşte *singulară* dacă $\det A = 0$; dacă $\det A \neq 0$, matricea se numeşte *nesingulară* (sau nedegenerată).

Teoremă. Determinantul produsului a două matrice de ordinul n este egal cu produsul determinanţilor celor două matrice

$$\det A \times B = \det B \times A = \det A \cdot \det B.$$

Demonstraţie. Dacă $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, atunci $A \times B = \left\|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right\|$ şi $\det A \times B = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right|$.

Însă conform cap. III, § 4, 3

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| = |a_{ij}| \cdot |b_{ij}|.$$

În mod asemănător $B \times A = \left\|\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}\right\|$ şi $\det B \times A = \left|\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}\right| = |b_{ij}| \cdot |a_{ij}|$.

4. Inversa unei matrice pătrate nesingulare

Fie $A = \| a_{ij} \| \in \mathcal{M}_n$ o matrice pătrată de ordinul n nesingulară, deci $\det A \neq 0$. Matricea de ordinul n

$$\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{Vmatrix} = \left\| \frac{A_{ji}}{\det A} \right\|,$$

unde A_{ij} este complementul algebric al lui a_{ij} din determinantul $|a_{ij}|$, se numește *matricea inversă* a matricei A și se notează cu A^{-1}.

Matricea A^{-1} are următoarele proprietăți:

1) $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = U$;

2) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Într-adevăr, ținînd seama de egalitățile stabilite anterior, $\sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_{jk} =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \det A$,

avem

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \quad (1)$$

Proprietatea 2 o obținem din 1

$$\det A \times A^{-1} = \det U = 1,$$

și aplicînd teorema stabilită la al. 3, deoarece $\det A \neq 0$,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Din proprietățile 1 și 2 ale matricei inverse rezultă următoarea

Teoremă. Matricele pătrate de ordinul n, nesingulare, cu elemente în R (sau C) formează grup față de operația înmulțire.

Exemple

1) Matricele pătrate de ordinul n de forma

$$A = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & a & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots a \end{Vmatrix}$$

formează un corp. Astfel de matrice se numesc *matrice scalare.*

Notînd cu M_n mulțimea lor, se verifică ușor că pentru $A, B, C \in M_n$ toate condițiile $S_1 \div S_5$, $T_1 \div T_5$ sînt verificate. Produsul a două matrice din M_n este comutativ și inversa A^{-1}, $A \neq 0$ este dată de

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \dots 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & \dots \frac{1}{a} \end{Vmatrix} \quad \text{și} \quad A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = U.$$

2) Să se arate că

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$

Avem

$$(A \times B) \times (A \times B)^{-1} = U,$$

însă

$$(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = A \times (B \times B^{-1}) \times A^{-1} = A \times U \times A^{-1} = A \times A^{-1} = U,$$

deoarece produsul matricelor este asociativ.

5. Rangul unei matrice

Fie A o matrice dreptunghiulară $m \times n$ și p un număr natural $\leqslant m, n$. Dacă alegem din A p linii $i_1, i_2, \dots, i_p$ și p coloane $j_1, j_2, \dots, j_p$, oarecare, obținem, înlăturînd elementele matricei care nu se găsesc pe liniile și coloanele alese, o matrice pătrată de ordinul p $(p = 1, 2, \dots, q, q = \min(m, n))$

$$\begin{Vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots a_{i_1 j_p} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots a_{i_2 j_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \dots a_{i_p j_p} \end{Vmatrix}$$

În modul acesta, cu liniile și coloanele matricei A se pot forma

$$C_m^p C_n^p = \frac{m!\,n!}{p!(m-p)!\;p!(n-p)!}$$

matrice de ordinul p. Determinanţii acestor matrice se numesc determinanţii de ordinul p ai matricei A. Dacă $A \neq 0$, atunci nu toţi aceşti determinanţi sînt nuli.

Se observă că dacă toţi determinanţii de ordinul s sînt nuli atunci toţi determinanţii de ordin superior lui s sînt nuli, deoarece, dezvoltînd determinanţii de ordinul $s+1$, de exemplu după o linie sau coloană, coeficienţii elementelor respective sînt determinanţi de ordin s, care sînt nuli. Dacă $A \neq 0$, există un număr $r \leqslant q = \min(m, n)$ astfel încît cel puţin un determinant al matricei A de ordinul r este diferit de zero şi toţi determinanţii de ordin $r+1$ sînt nuli. Numărul r care îndeplineşte această condiţie se numeşte rangul matricei A.

Dacă $A = 0$, rangul matricei A este zero, $r = 0$.

Exemplu

Rangul matricei

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 12 & 7 \end{Vmatrix}$$

este doi. Într-adevăr, toţi determinanţii de ordinul trei sînt nuli, deoarece dacă în matricea A adunăm linia întîi cu linia a doua obţinem linia a treia. Această operaţie, efectuată în toţi determinanţii de ordinul trei, arată că toţi sînt nuli.

Rangul matricei este doi, deoarece matricea formată cu primele două linii şi coloane $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$ are determinantul diferit de zero.

Capitolul IV

SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

§ 1. REGULA LUI CRAMER

1. Sisteme echivalente

Să considerăm un sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + b_1 = 0 \\ E_2 &\equiv a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + b_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_m &\equiv a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + b_m = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

m şi n fiind două numere naturale oarecare. Se numeşte soluţie a sistemului (1) un sistem de numere $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ care introduse în ecuaţiile sistemului în locul lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectiv, le verifică pe toate.

Se numeşte *sistem echivalent* cu sistemul (1) orice sistem liniar care admite aceleaşi soluţii ca şi sistemul (1). Sisteme echivalente cu (1) se obţin adăugînd la sistemul (1) ecuaţii ce se obţin din ecuaţiile sistemului prin combinaţii liniare

$$E_{m+1} \equiv \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_m E_n = 0.$$

Într-adevăr, soluţiile sistemului (1) anulează fiecare din expresiile E_k, deci anulează şi pe E_{m+1}.

Rezultă că două sisteme de ecuaţii pot fi echivalente fără să aibă în mod necesar acelaşi număr de ecuaţii.

2. Regula lui Cramer

Fie

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + b_1 = 0 \\ E_2 &\equiv a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + b_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_n &\equiv a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n + b_n = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

un sistem de n ecuații cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$, neomogen. Spunem că un sistem de forma (2) se numește neomogen dacă nu toate numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt nule $(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \neq 0)$.

Determinantul format cu coeficienții necunoscutelor se numește determinantul sistemului

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|$$

și îl presupunem diferit de zero, $D \neq 0$.

Să înmulțim în sistemul (2) prima ecuație cu A_{11}, ecuația a doua cu A_{21} ș.a.m.d., ultima ecuație cu A_{n1}, A_{ij} fiind complementul algebric al lui a_{ij}. Dacă adunăm cele n ecuații astfel înmulțite, obținem

$$\sum_{k=1}^{n} A_{k1} E_k = 0$$

sau, punînd în evidență necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{k1} a_{k1}\Big) x_1 + \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{k1} a_{k2}\Big) x_2 + \ldots + \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{k1} a_{kn}\Big) x_n + \sum_{k=1}^{n} A_{k1} b_k = 0. \quad (3)$$

Însă am arătat (A. cap. III, § 3, al. 2) că avem

$$\sum_{k=1}^{n} A_{k1} a_{k1} = D, \qquad \sum_{k=1}^{n} A_{k1} a_{kp} = 0, \qquad p \neq 1,$$

astfel încît ecuația se transformă în

$$D x_1 + A_{11} b_1 + A_{21} b_2 + \ldots + A_{n1} b_n = 0.$$

Se observă că termenul liber se scrie astfel

$$A_{11} b_1 + A_{21} b_2 + \ldots + A_{n1} b_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1,$$

adică un determinant de ordinul n ce se obține din determinantul sistemului, înlocuind coloana coeficienților lui x_1 cu termenii liberi b_k. Cu această notație ecuația (3) se scrie

$$D x_1 + D_1 = 0 \qquad (3')$$

și am obținut astfel o ecuație care conține numai pe x_1.

În general, dacă înmulțim în (2) prima ecuație cu A_{1p}, ecuația a doua cu A_{2p} ș.a.m.d., ultima ecuație cu A_{np} și le adunăm

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kp} E_k = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4)$$

obținem un sistem echivalent cu sistemul (2). Dacă punem în evidență necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sistemul (4) se scrie

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{kp} a_{k1}\right) x_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} A_{kp} a_{k2}\right) x_2 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} A_{kp} a_{kn}\right) x_n + \sum_{k=1}^{n} A_{kp} b_k = 0.$$

Ținem seama din nou de egalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kp} a_{kq} = \delta_{pq} D \tag{5}$$

și de faptul că

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kp} b_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,p-1} & b_1 & a_{1,p+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,p-1} & b_2 & a_{2,p+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,p-1} & b_n & a_{n,p+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_p$$

și obținem următorul sistem echivalent cu (2)

$$Dx_p + D_p = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, n$$

sau

$$\begin{aligned} Dx_1 + D_1 &= 0 \\ Dx_2 + D_2 &= 0 \\ \cdots\cdots & \\ Dx_n + D_n &= 0, \end{aligned}$$

din care obținem imediat soluțiile, deoarece $D \neq 0$,

$$x_1 = -\frac{D_1}{D}, \quad x_2 = -\frac{D_2}{D}, \quad \ldots, \quad x_n = -\frac{D_n}{D}. \tag{6}$$

Să arătăm acum că (6) verifică sistemul (2). Dacă înlocuim soluțiile (6) în ecuația E_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$, avem

$$E_h \equiv a_{h1}\left(-\frac{D_1}{D}\right) + a_{h2}\left(-\frac{D_2}{D}\right) + \ldots + a_{hn}\left(-\frac{D_n}{D}\right) + b_h$$

sau

$$-DE_h \equiv a_{h1} D_1 + a_{h2} D_2 + \ldots + a_{hn} D_n - b_h D.$$

Însă

$$D_k = \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sk}, \text{ deci}$$

$$-DE_h \equiv a_{h1} \sum_{s=1}^{n} b_s A_{s1} + a_{h2} \sum_{s=1}^{n} b_s A_{s2} + \ldots + a_{hn} \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sn} - b_h D,$$

și dacă grupăm după b_k

$$-DE_h \equiv b_1 \left(\sum_{k=1}^{n} a_{hk} A_{1k}\right) + b_2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_{hk} A_{2k}\right) + \ldots + b_h \left(\sum_{k=1}^{n} a_{hk} A_{hk}\right) + \ldots$$

$$\ldots + b_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_{hk} A_{nk}\right) - b_h D$$

și dacă ținem seama de egalitățile (5), obținem

$$-DE_h \equiv b_h D - b_h D = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, n.$$

Prin urmare, soluțiile (6) verifică sistemul (2).

Am obținut astfel următoarea regulă de rezolvare a unui sistem de n ecuații cu n necunoscute, numită

Regula lui Cramer. Un sistem (2) de n ecuații liniare cu n necunoscute, cu determinantul sistemului diferit de zero, are totdeauna soluția dată de

$$x_1 = -\frac{D_1}{D}, \quad x_2 = -\frac{D_2}{D}, \ \ldots, \ x_n = -\frac{D_n}{D},$$

unde determinantul de la numitor este determinantul sistemului, iar determinantul D_k de la numărător (pentru x_k) se obține din determinantul sistemului, înlocuind coloana k a coeficienților lui x_k cu termenii liberi $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Sistemul (2) cu $D \neq 0$ se numește *sistem compatibil determinat.*

Exemple

1) Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} x + y \quad + z &= 1 \\ ax + by \ + cz &= k \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z &= k^2 \end{aligned}$$

Să se generalizeze.

Determinantul sistemului este determinantul lui Vandermonde:

$$V_3(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$$

și este diferit de zero dacă $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. În această situație, soluția este dată de

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{(b - k)(c - k)(c - b)}{(b - a)(c - a)(c - b)} = \frac{(k - b)(k - c)}{(a - b)(a - c)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{(k-a)\,(c-a)\,(c-k)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)} = \frac{(k-a)\,(k-c)}{(b-a)\,(b-c)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{(b-a)\,(k-a)\,(k-b)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)} = \frac{(k-a)\,(k-b)}{(c-a)\,(c-b)}$$

Pentru sistemul

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ &a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = k \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_n, \\ &a_1^{n-1} x_1 + a_2^{n-1} x_2 + \ldots + a_n^{n-1} x_n = k^{n-1} \end{aligned}$$

se obține în mod asemănător

$$x_p = \frac{(k-a_1)\,(k-a_2)\ldots(k-a_{p-1})\,(k-a_{p+1})\ldots(k-a_n)}{(a_p-a_1)\,(a_p-a_2)\ldots(a_p-a_{p-1})\,(a_p-a_{p+1})\ldots(a_p-a_n)}, \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

2) Se dă circuitul din figura 20, în care $E = 60$ V și laturile au rezistența de $r = 2\ \Omega$. Se cere să se determine intensitățile curenților care circulă prin toate laturile.

Folosind teoremele lui Kirchhoff:

a) în orice nod suma curenților este nulă;

b) pe orice drum închis suma tensiunilor întîlnite este nulă, avem

nodul $A: I_1 - i_1 - I_2 = 0$
nodul $B: I_4 - i_4 - I_1 = 0$
nodul $C: I_3 - i_3 - I_4 = 0$
nodul $D: I_2 - i_2 - I_3 = 0$

circuitul $ABFA: I_1 r + i_1 r - i_4 r = E$
circuitul $ADFA: I_2 r + i_2 r - i_1 r = 0$
circuitul $DCFD: I_3 r + i_3 r - i_2 r = 0$
circuitul $CFBC: I_4 r + i_4 r - i_3 r = 0.$

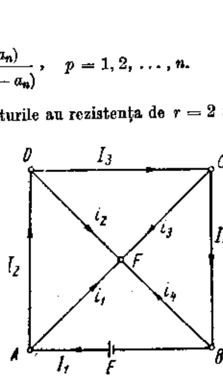


Fig. 20

Am obținut astfel un sistem de 8 ecuații cu 8 necunoscute. Putem simplifica rezolvarea sistemului, eliminînd pe i_1, i_2, i_3, i_4; după eliminare obținem sistemul

$$\begin{aligned} 3I_1 r - I_2 r - I_4 r &= E \\ -I_1 r + 3I_2 r - I_3 r &= 0 \\ -I_2 r + 3I_3 r - I_4 r &= 0 \\ -I_1 r - I_3 r + 3I_4 r &= 0, \end{aligned}$$

cu determinantul sistemului

$$r\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 3\end{vmatrix} = 45\cdot r.$$

Deci

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 3\end{vmatrix}}{45}\cdot\frac{E}{r}=\frac{21}{45}\cdot\frac{E}{r};\qquad I_2=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 3\end{vmatrix}}{45}\cdot\frac{E}{r}=\frac{9}{45}\cdot\frac{E}{r}$$

$$I_3=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}}{45}\cdot\frac{E}{r}=\frac{6}{45}\cdot\frac{E}{r};\qquad I_4=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{vmatrix}}{45}\cdot\frac{E}{r}+\frac{9}{45}\cdot\frac{E}{r}.$$

Înlocuind pe $E = 60$ V și $r = 2\ \Omega$, avem

$$I_1=\frac{21}{45}\cdot\frac{60\text{ V}}{2\ \Omega}=14\text{ A},\qquad i_1=I_1-I_2=8\text{ A}$$

$$I_2=\frac{9}{45}\cdot\frac{60\text{ V}}{2\ \Omega}=6\text{ A},\qquad i_2=I_2-I_3=2\text{ A}$$

$$I_3=\frac{6}{45}\cdot\frac{60\text{ V}}{2\ \Omega}=4\text{ A},\qquad i_3=I_3-I_4=-2\ A$$

$$I_4=I_2=6\text{ A},\qquad i_4=I_4-I_1=-8\text{ A}.$$

În figura 20, sensul curenților i_3 și i_4 trebuie schimbat, pentru ca să corespundă soluției găsite.

§ 2. TEOREMA LUI ROUCHÉ

1. Sisteme de m ecuații liniare cu n necunoscute. Determinant principal. Determinanți caracteristici

Fie sistemul

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 = 0\\ E_2 &\equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 = 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ E_m &\equiv a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

de m ecuaţii liniare cu n necunoscute, m şi n fiind două numere naturale oarecare. Cu ajutorul coeficienţilor necunoscutelor să formăm matricea $\mathcal{M}$ cu m linii şi n coloane

$$\mathcal{M} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

Deoarece nu toţi a_{ij} sînt nuli, rangul matricei $\mathcal{M}$ va fi $p \geqslant 1$.

Presupunem că unul din determinanţii de ordinul p diferit de zero este chiar

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

ceea ce este totdeauna posibil să se realizeze, schimbînd la nevoie atît ordinea ecuaţiilor cît şi indicii necunoscutelor. Determinantul $\Delta_p \neq 0$ se numeşte *determinantul principal* al sistemului (1). Evident, există şi alţi determinanţi de ordinul p diferiţi de zero, însă toţi determinanţii de ordin $p+1,\ p+2, \dots, q$; $q = \min(m, n)$ ce se pot forma cu liniile şi coloanele matricei $\mathcal{M}$ sînt nuli.

Ecuaţiile $E_1 = 0,\ E_2 = 0,\ \dots,\ E_p = 0$ care intervin în formarea determinantului principal se numesc *ecuaţii principale*, iar necunoscutele $x_1,\ x_2, \dots x_p$, cu ai căror coeficienţi se formează determinantul principal, se numesc *necunoscute principale*.

Celelalte ecuaţii şi necunoscute se numesc *secundare*.

Se numeşte *determinant caracteristic* un determinant de ordinul $p+1$ din $\mathcal{M}$, obţinut prin completarea determinantului principal cu o coloană formată din termenii liberi corespunzători ai ecuaţiilor principale şi cu o linie formată cu coeficienţii necunoscutelor principale şi cu termenul liber al unei ecuaţii secundare. Un determinant caracteristic este

$$\Delta_{p+\alpha} = \left| \begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & & & b_2 \\ & \Delta_p & & \vdots \\ & & & b_p \\ \hline a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots\ a_{p+\alpha,p} & b_{p+\alpha} \end{array} \right|$$

Avem, prin urmare, $m - p$ determinanţi caracteristici. Dacă $m = p$ nu există determinanţi caracteristici. Sîntem în măsură acum să enunţăm teorema lui Rouché.

2. Teorema lui Rouché

Teoremă. Un sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute (1) are soluții (este compatibil) dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli.

Demonstrație. *a)* Dacă luăm din sistemul (1) ecuațiile principale

$$E_1 = 0,\ E_2 = 0,\ \ldots,\ E_p = 0$$

și considerăm ca necunoscute necunoscutele principale, adică pe $x_1, x_2, \ldots, x_p$, putem aplica regula lui Cramer, deoarece determinantul sistemului este determinantul principal $\Delta_p \neq 0$.

Obținem astfel $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$, soluții care depind de $n-p$ parametri $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, necunoscutele secundare. Nu putem afirma că soluțiile găsite verifică și celelalte ecuații ale sistemului, ecuațiile secundare. Să vedem în ce condiții sînt verificate.

b) Să calculăm acum determinantul

$$D_{p+\alpha} = \begin{vmatrix} & & & E_1 \\ & \Delta_p & & E_2 \\ & & & \vdots \\ & & & E_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} \cdots & a_{p+\alpha,p} & E_{p+\alpha} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Pe ultima coloană sînt ecuațiile principale $E_1, E_2, \ldots, E_p$ și o ecuație secundară $E_{p+\alpha}$. Deoarece ultima coloană este o sumă de $n+1$ elemente (termenii fiecărei ecuații), determinantul $D_{p+\alpha}$ se scrie ca o sumă de $n+1$ determinanți, în modul următor

$$D_{p+\alpha} = \begin{vmatrix} & & & a_{11} \\ & \Delta_p & & a_{21} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{p1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} \cdots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,1} \end{vmatrix} x_1 +$$

$$+ \begin{vmatrix} & & & a_{12} \\ & \Delta_p & & a_{22} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{p2} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} \cdots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,2} \end{vmatrix} x_2 + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} \begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n} \\ & \Delta_p & & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ \hline & & & a_{pn} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n} \end{array} \end{vmatrix} x_n +$$

$$+ \begin{vmatrix} \begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & \Delta_p & & b_2 \\ & & & \vdots \\ \hline & & & b_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots a_{p+\alpha,p} & b_{p+\alpha} \end{array} \end{vmatrix}$$

Matricea $\mathfrak{M}$ este de rang p, deci coeficienţii lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt nuli, fiind determinanţi de ordinul $p + 1$ formaţi cu liniile şi coloanele lui $\mathfrak{M}$. Prin urmare, $D_{p+\alpha}$ nu depinde de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $D_{p+\alpha}$ este egal cu ultimul determinant, care este un determinant caracteristic $\Delta_{p+\alpha}$, deci

$$D_{p+\alpha} = \Delta_{p+\alpha}. \tag{3}$$

c) Să înlocuim acum în $D_{p+\alpha}$, şi anume în ultima coloană, pe $x_1, x_2, \ldots x_p$ cu soluţiile $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$. $E_1, E_2, \ldots, E_p$ vor fi nule, iar $E_{p+\alpha}$ va lua valoarea $E_{p+\alpha}^0$. Valoarea lui $D_{p+\alpha}$ nu se schimbă, deoarece am arătat că este independentă de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cu această înlocuire $D_{p+\alpha}$ se scrie

$$D_{p+\alpha} = \begin{vmatrix} \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \Delta_p & & 0 \\ & & & \vdots \\ \hline & & & 0 \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots a_{p+\alpha,p} & E_{p+\alpha}^0 \end{array} \end{vmatrix}$$

Dezvoltînd după ultima coloană

$$D_{p+\alpha} = \Delta_p \cdot E_{p+\alpha}^0 \tag{4}$$

şi ţinînd seama de (3), avem relaţiile

$$\Delta_{p+\alpha} = \Delta_p\, E_{p+\alpha}^0,$$

în număr de $m - p$, şi anume

$$\begin{aligned} \Delta_{p+1} &= \Delta_p\, E_{p+1}^0 \\ \Delta_{p+2} &= \Delta_p\, E_{p+2}^0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_m &= \Delta_p\, E_m^0 \end{aligned} \tag{5}$$

Concluzii

Să presupunem că $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$ verifică și ecuațiile secundare [adică sistemul (1) este compatibil] $E_{p+1} = 0, \ldots, E_m = 0$. Conform lui (5), trebuie ca $\Delta_{p+1} = 0, \Delta_{p+2} = 0, \ldots, \Delta_m = 0$, adică toți determinanții caracteristici trebuie să fie nuli. Invers, dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli, deoarece $\Delta_p \neq 0$, din (5) rezultă că $E_{p+1}^0 = 0, E_{p+2}^0 = 0, \ldots, E_m^0 = 0$, adică soluțiile $x_1^0, \ldots, x_m^0$ verifică și ecuațiile secundare; sistemul (1) are, prin urmare, soluții. Cu aceasta teorema lui Rouché este demonstrată.

Dacă cel puțin unul din determinanții caracteristici este diferit de zero, *sistemul este imposibil* (nu are soluții). Dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli și

1) $n > p$, există $n-p$ necunoscute secundare, care apar ca parametri în soluțiile găsite $x_1^0, \ldots, x_p^0$; spunem că avem ∞^{n-p} soluții. *Sistemul este compatibil nedeterminat.*

2) $n = p$, nu avem necunoscute secundare, *sistemul este compatibil determinat.*

3) $m = n = p$, soluțiile sînt date de regula lui Cramer. (În cazul 3 nu există determinanți caracteristici; pentru uniformitate spunem și în această situație că sînt toți nuli.)

Exemple

1) Să se cerceteze dacă sistemul

$$x - y + 3z + t + 8 = 0$$

$$3x + y - z + 2t + 5 = 0$$

$$2x + 2y - 4z + t - 3 = 0$$

are soluții. În caz afirmativ să se rezolve.

Matricea $\mathcal{M}$ a coeficienților necunoscutelor

$$\mathcal{M} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{matrix} \right\|$$

este de rang $p = 2$, deoarece toți determinanții de ordinul trei sînt nuli.

Într-adevăr, scăzînd în matricea $\mathcal{M}$ linia întîi din linia a doua, obținem linia a treia. Luăm ca determinant principal pe

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Avem un singur determinant caracteristic

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

care este nul, deci sistemul este compatibil. Primele două ecuații și necunoscutele x, y sînt principale. Ultima ecuație și necunoscutele z, t sînt secundare. Avem ∞^2 soluții date de

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} 8+3z+t & -1 \\ 5-z+2t & 1 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{2z+3t+13}{4}$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 8+3z+t \\ 3 & 5-z+2t \end{vmatrix}}{4} = \frac{+10z+t+19}{4}.$$

2) Să se discute după valorile parametrului λ sistemul

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 1 \\ x-y+2z &= 2 \\ 2\lambda x+\lambda^2 y+3z &= 3\lambda. \end{aligned}$$

În cazurile de compatibilitate, să se rezolve.

Matricea $\mathcal{M}$ este de rang trei dacă determinantul sistemului

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 3 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-9)$$

este diferit de zero.

a) Pentru $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 9$, avem, după Cramer,

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3\lambda & \lambda^2 & 3 \end{vmatrix}}{(\lambda-1)(\lambda-9)} = -\frac{15\lambda-15}{(\lambda-1)(\lambda-9)} = -\frac{15}{\lambda-9}$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2\lambda & 3\lambda & 3 \end{vmatrix}}{(\lambda-1)(\lambda-9)} = -\frac{-3\lambda+3}{(\lambda-1)(\lambda-9)} = \frac{3}{\lambda-9}$$

$$z = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 3\lambda \end{vmatrix}}{(\lambda-1)(\lambda-9)} = -\frac{-\lambda^2+\lambda}{(\lambda-1)(\lambda-9)} = \frac{\lambda}{\lambda-9}.$$

b) Pentru $\lambda = 1$, sistemul devine

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 1 \\ x-y+2z &= 2 \\ 2x+y+3z &= 3. \end{aligned}$$

Rangul matricei $\mathcal{M}$ este doi. Determinant principal luăm pe

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Determinantul caracteristic

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

deci sistemul este compatibil. Necunoscutele principale sînt x şi y; avem o infinitate de soluţii date de

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 2-2z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5}{3}(1-z), \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 2-2z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{3}(z-1).$$

c) Dacă $\lambda = 9$, sistemul se scrie

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 6x + 27y + z &= 9 \end{aligned}$$

Matricea $\mathfrak{M}$ este de rang doi. Determinant principal luăm tot pe Δ_2. Determinantul caracteristic $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 6 & 27 & -9 \end{vmatrix} = 24$; sistemul este imposibil.

3. Teorema lui Kronecker şi Capelli

Un sistem de m ecuaţii liniare

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ E_2 &\equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_m &\equiv a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m = 0 \end{aligned}$$

are soluţii dacă şi numai dacă matricele

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|, \quad \mathfrak{M}' = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{matrix} \right\|$$

au acelaşi rang p. Sistemul este determinat dacă $p = n$ şi nedeterminat dacă $p < n$.

Demonstraţie. Teorema de mai sus reprezintă de fapt o altă formulare a teoremei lui Rouché.

Într-adevăr, dacă matricea $\mathfrak{M}$ are rangul p şi toţi determinanţii caracteristici sînt nuli, rangul matricei $\mathfrak{M}'$ este rangul matricei $\mathfrak{M}$, deoarece sin-

gurii determinanţi de ordinul $p+1$ din matricea $\mathfrak{M}'$, distincţi de determinanţii de ordinul $p+1$, formaţi din $\mathfrak{M}$, sînt determinanţii caracteristici.

Invers, dacă cele două matrice au acelaşi rang p, deci toţi determinanţii de ordinul $p+1$ din $\mathfrak{M}$ sînt nuli, urmează că toţi determinanţii caracteristici sînt nuli, deoarece sînt singurii determinanţi de ordinul $p+1$ ce se pot forma din matricea $\mathfrak{M}'$, distincţi de determinanţii de ordinul $p+1$ ai matricei $\mathfrak{M}$. Ultima parte a teoremei este o consecinţă a *concluziilor* alineatului precedent.

4. Sisteme de ecuaţii liniare şi omogene

Un astfel de sistem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{1}$$

(toţi termenii liberi sînt nuli, $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$) este totdeauna compatibil, deoarece cele două matrice $\mathfrak{M}$ şi $\mathfrak{M}'$ au acelaşi rang, matricea $\mathfrak{M}'$ avînd elementele ultimei coloane nule, şi are soluţia (banală) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Dacă rangul matricei $\mathfrak{M}$ este mai mic decît n, atunci sistemul (1) are şi alte soluţii.

Aplicaţie

Să considerăm sistemul de n ecuaţii cu n necunoscute, omogen,

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{array} \tag{2}$$

cu matricea $\mathfrak{M}$ de rang $n-1$, adică determinantul sistemului

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

este nul. În ipoteza că determinantul de ordinul $n-1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & \ldots a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

este diferit de zero, soluțiile sistemului (2) sînt date de

$$x_k = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1,k-1} & a_{1n} & a_{1,k+1} & \dots a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2,k-1} & a_{2n} & a_{2,k+1} & \dots a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots a_{n-1,k-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,k+1} & \dots a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}} \cdot x_n, \; k = 1, 2, \dots, n-1 \tag{4}$$

și, dacă A_{nk} este complementul algebric al lui a_{nk}, soluțiile (4) se pot scrie

$$x_1 = A_{n1}\,t,\; x_2 = A_{n2}\,t,\; \dots,\; x_n = A_{nn}\,t,$$

t fiind un parametru arbitrar.

Exemplu

Să se determine λ, astfel ca sistemul

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \\ \lambda x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

să admită și alte soluții în afară de $x = y = z = 0$. Matricea $\mathfrak{M}$

$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \lambda & -1 & -1 \end{matrix} \right\|$ este de rang $p < 3$ dacă determinantul

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix}$ este nul. $D = 5\lambda + 7 = 0$ pentru $\lambda = -\frac{7}{5}$. Soluțiile sînt date de

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \alpha, \qquad x = 5\alpha,\; y = -4\alpha,\; z = -3\alpha.$$

Am arătat la proprietățile determinanților de ordinul n că, dacă într-un determinant elementele unei linii (sau coloane) sînt combinații liniare formate din elementele celorlalte linii (sau coloane), determinantul este nul. Să demonstrăm acum că, reciproc, dacă un determinant este nul, o linie sau coloană este o combinație liniară de celelalte linii (sau coloane). Într-adevăr, conform teoremei lui Rouché, dacă sistemul (2) nu are toate soluțiile $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ nule, atunci determinantul (3) este nul. Dacă $x_n^0 \neq 0$, să înmulțim coloana întîi cu x_1^0, coloana a doua cu x_2^0 ș.a.m.d., coloana a n-a cu x_n^0 și să adunăm totul la ultima coloană, care va avea astfel elementele

$$\begin{gathered} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \dots + a_{1n}x_n^0 \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \dots + a_{2n}x_n^0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \dots + a_{nn}x_n^0 \end{gathered}$$

şi care sînt toate nule, deoarece $x_1^0, \ldots, x_n^0$ este o soluţie a sistemului (1). Deoarece $x_n^0 \neq 0$, rezultă şi

$$-a_{1n} = \frac{x_1^0}{x_n^0} a_{11} + \frac{x_2^0}{x_n^0} a_{12} + \ldots + \frac{x_{n-1}^0}{x_n^0} a_{1,n-1}$$

$$-a_{2n} = \frac{x_1^0}{x_n^0} a_{21} + \frac{x_2^0}{x_n^0} a_{22} + \ldots + \frac{x_{n-1}^0}{x_0^0} a_{2,n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-a_{nn} = \frac{x_1^0}{x_n^0} a_{n1} + \frac{x_2^0}{x_n^0} a_{n2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^0}{x_n^0} a_{n,n-1},$$

adică elementele ultimei coloane sînt *combinaţii* liniare de celelalte $n-1$ coloane. Am demonstrat deci următoarea

Teoremă. Condiţia necesară şi suficientă ca un determinant să fie nul este ca una din linii (sau coloane) să fie o combinaţie liniară de celelalte linii (sau coloane).

Aplicaţie

Să revenim la determinantul $D_{p+\alpha}$, pe care l-am folosit la demonstraţia teoremei lui Rouché

$$D_p = \left|\begin{array}{cccc|c} & & & & E_1 \\ & & & & E_2 \\ & \Delta_p & & & \vdots \\ & & & & E_p \\ \hline a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & E_{p+\alpha} \end{array}\right| = \Delta_{p+\alpha}.$$

Dacă sistemul este compatibil, toţi determinanţii caracteristici $\Delta_{p+\alpha}$ sînt nuli, deci

$$D_{p+\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m-p.$$

Aplicînd teorema precedentă, urmează că există un sistem de numere $\lambda_{1,\alpha}, \lambda_{2,\alpha}, \ldots, \lambda_{p,\alpha}$, care nu sînt toate nule, astfel încît

$$E_{p+\alpha} \equiv \lambda_{1,\alpha} E_1 + \lambda_{2,\alpha} E_2 + \ldots + \lambda_{p,\alpha} E_p, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m-p,$$

şi deci putem enunţa următoarea

Teoremă. Ecuaţiile secundare ale unui sistem de ecuaţii liniare, compatibil, sînt combinaţii liniare ale ecuaţiilor principale.

Prin urmare, un sistem este echivalent cu sistemul format numai cu ecuaţiile sale principale.

Exemple

1) Să se găsească λ şi μ astfel încît sistemul

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv x + 3y + z = 0 \\ E_2 &\equiv 2x - 5y + 3z = 0 \\ E_3 &\equiv \lambda x - 2y + 4z = 0 \\ E_4 &\equiv x + \mu y + 2z = 0 \end{aligned}$$

să aibă şi alte soluții în afară de $x = y = z = 0$. Să se rezolve.

Trebuie să avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ \lambda & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & \mu & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

deci

$$\lambda = 3, \quad \mu = -8,$$

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} z & 3 \\ 3z & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = -\frac{14}{11} z, \qquad y = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 2 & 3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{11} z.$$

Ecuațiile secundare sînt E_3, E_4, iar cele principale E_1, E_2; avem

$$E_3 \equiv E_1 + E_2, \qquad E_4 \equiv -E_1 + E_2.$$

2) Să se discute după valorile parametrilor a, b, c sistemul

$$\begin{aligned} x + ay + az &= 1 \\ ax + y + bz &= c \\ ax + by + z &= c^2 \end{aligned}$$

Determinantul sistemului este dat de

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (b - 1)\ (2a^2 - b - 1).$$

Discuție. 1) $D \neq 0$, sistemul este compatibil determinat.

2) $b = 1$, $a^2 - 1 \neq 0$, $D = 0$,

luăm determinant principal pe

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 \neq 0.$$

Determinantul caracteristic

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & c \\ a & 1 & c^2 \end{vmatrix} = (a^2 - 1)\ (c - c^2)$$

este nul dacă $c = 0$ sau $c = 1$, cînd sistemul are o infinitate de soluții. Dacă $c \neq 0$, $c \neq 1$, sistemul este imposibil.

3) $b \neq 1$, $2a^2 - b - 1 = 0$, deci $a^2 - 1 \neq 0$.

Determinantul caracteristic

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & c \\ a & b & c^2 \end{vmatrix} = (a^2 - 1)(2a - c - c^2)$$

este nul dacă $c^2 + c = 2a$, cînd sistemul are o infinitate de soluții.

Dacă $c^2 + c \neq 2a$, sistemul este imposibil.

4) $b = 1$, $a = 1$, $c = 1$, sistemul are o dublă infinitate de soluții.

5) $b = 1$, $a = -1$, sistemul este imposibil pentru orice valoare a lui c.

5. Aplicațiile matricelor la sistemele de ecuații liniare

Vom considera cazul unui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute neomogen, cu determinantul sistemului diferit de zero

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dacă notăm

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

sistemul se poate scrie, matriceal,

$$AX = B. \tag{1}$$

Matricea A este nesingulară, deoarece $\det A \neq 0$; are deci o inversă A^{-1}

$$A^{-1} = \left\Vert \frac{A_{ji}}{\det A} \right\Vert$$

și, înmulțind la stînga ecuația (1) cu A^{-1}, avem

$$X = A^{-1} B,$$

care se mai poate scrie

$$x_1 = \frac{1}{\det A}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{1}{\det A}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n),$$

adică tocmai soluția dată de regula lui Cramer.

CALCULUL DIFERENŢIAL

Capitolul I

ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE

§ 1. MULŢIMI LINIARE

1. Vecinătăţi

Vom considera acum mulţimi de numere reale sau, ceea ce este echivalent, mulţimi de puncte pe o dreaptă, avînd în vedere corespondenţa biunivocă a mulţimii numerelor reale cu punctele unei drepte. Astfel de mulţimi se numesc *liniare*. Fie x_0 un punct pe dreaptă. Vom numi *vecinătate* a lui x_0 orice mulţime V care conţine un interval deschis (a, b) care conţine pe x_0, deci $x_0 \in (a,b) \subset V$.

Vecinătăţile punctului x_0 au următoarele proprietăţi:

1) Orice mulţime U care conţine pe V este tot o vecinătate a lui X_0, deoarece

$$U \supset V \supset (a,b) \ni x_0, \text{ deci } U \supset (a,b) \ni x_0.$$

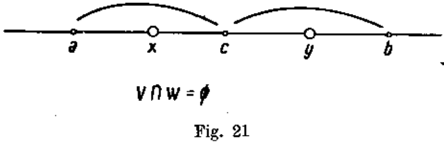


Fig. 21

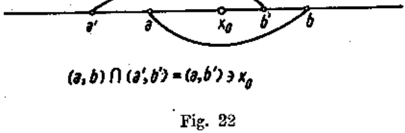


Fig. 22

2) Intersecţia a două vecinătăţi a lui x_0 este tot o vecinătate a lui x_0 (fig. 22).

3) Oricare ar fi punctele $x \neq y$ de pe dreaptă, există o vecinătate V a lui x şi o vecinătate W a lui y fără puncte comune $V \cap W = \emptyset$ (fig. 21).

Dacă $x < y$ există un număr c astfel încît $x < c < y$; vecinătăţile $V = (a, c)$, $W = (c, b)$, $a < x$, $y < b$, îndeplinesc condiţia cerută, deoarece $(a, c) \cap (c, b) = \theta$.

Prin alegerea vecinătăţilor fiecărui punct de pe dreaptă s-a definit pe dreaptă o *structură topologică.* Dreapta R cu această structură topologică este un *spaţiu topologic* numit *dreapta reală.* Din cauza proprietăţii 3, dreapta reală este un *spaţiu separat.*

De obicei se folosesc pentru vecinătăţi *vecinătăţile simetrice*

$$|x - x_0| < \varepsilon \text{ sau } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

2. Mulţimi deschise. Mulţimi închise.

Un punct x_0 este *interior* unei mulţimi A dacă există o vecinătate (a, b) a lui x_0, conţinută în A, deci

$$x_0 \in (a, b) \subset A.$$

Un punct x_0 este *exterior* unei mulţimi A dacă există o vecinătate a lui x_0 ale cărei puncte aparţin lui $\complement A$.

Un punct x_0 este *punct frontieră* al unei mulţimi A dacă *orice vecinătate* a lui x_0 conţine puncte ale lui A şi ale lui $\complement A$.

Exemplu

Pentru intervalul închis [1, 3], punctul $x_0 = 2$ este interior, $x_1 = 3$ este punct frontieră, $x_2 = 4$ este punct exterior.

O mulţime care are toate punctele sale puncte interioare se numeşte *mulţime deschisă.*

Exemple

1) Intervalul deschis (a, b) este o mulţime deschisă.
2) Reuniunea $(a, b) \cap (c, d)$ este o mulţime deschisă.
3) Mulţimea numerelor reale este deschisă.

Fie A o mulţime de numere. Un punct $x_0 \in R$ (nu neapărat din A) se numeşte *punct aderent* al lui A, dacă orice vecinătate V a lui x_0 conţine cel puţin un punct din A (dacă $x_0 \in A$, acel punct poate fi numai x_0), deci $V \cap A \neq \theta$.

Din definiţie rezultă că toate punctele unei mulţimi sînt puncte aderente ale mulţimii.

O mulţime A care îşi conţine toate punctele aderente se numeşte *mulţime închisă.*

Exemple

1) Intervalul închis $[a, b]$ este o mulţime închisă.
2) Reuniunea $[a, b] \cup [c, d]$ este o mulţime închisă.
3) Mulţimea formată dintr-un singur element a este o mulţime închisă.

Mulţimea punctelor frontieră ale unei mulţimi A formează *frontiera* lui A şi se notează FA. Din definiţie rezultă că frontiera lui A este şi frontiera complementarei lui A, deci

$$FA = F\complement A.$$

Exemple

1) Frontiera intervalului (a, b) este formată din punctele a şi b.

2) Mulţimea A a punctelor cuprinse între două sfere concentrice S_1 şi S_2 este o mulţime deschisă. Suprafeţele celor două sfere concentrice formează frontiera mulţimii A. Complementara mulţimii A faţă de tot spaţiul este formată din mulţimea punctelor interioare sferei de rază mai mică, reunită cu mulţimea punctelor exterioare sferei de rază mai mare. Frontiera acestei mulţimi este formată tot din suprafeţele celor două sfere.

3. Mulţimi mărginite

O mulţime A de numere se numeşte *mărginită la stînga, mărginită inferior* sau *minorată* dacă există un număr m astfel încît pentru orice număr $a \in A$ să avem

$$m \leqslant a.$$

Numărul m se numeşte *minorant* al lui A. Numărul m poate să aparţină sau nu mulţimii A. Dacă $m' < m$, atunci şi m' este minorant al lui A.

Exemple

1) Mulţimea $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ (n număr natural) este minorată de zero, însă zero nu aparţine mulţimii.

2) Mulţimea numerelor naturale $N = \{1, 2, \ldots\}$ este mărginită inferior de 1 şi punctul 1 aparţine mulţimii.

O mulţime A de numere se numeşte *mărginită la dreapta, mărginită superior* sau *majorată* dacă există un număr M încît pentru orice $a \in A$ să avem negalitatea

$$a \leqslant M.$$

Numărul M se numeşte majorant al lui A şi poate să aparţină sau să nu aparţină mulţimii A. Dacă $M' > M$, atunci şi M' este majorant al lui A.

Exemplu

Mulţimea $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ este majorată de $M = -1$ şi numărul -1 aparţine mulţimii.

O mulţime mărginită la stînga şi la dreapta se numeşte *mărginită.*

Exemple

1) Mulţimea numerelor întregi şi pozitive este mărginită inferior, dar nu este mărginită superior.

2) Mulţimea numerelor $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ este mărginită, deoarece este mărginită superior de numărul 1 şi inferior de numărul zero.

Se numeşte *margine superioară* a unei mulţimi A cel mai mic majorant, adică un număr M care se bucură de următoarele proprietăţi :

1) pentru orice număr $a \in A$, $a \leqslant M$;

2) pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $b \in A$ cu $b > M - \varepsilon$, numărul b, putînd fi chiar M, dacă $M \in A$.

Condiţia 2 este echivalentă cu următoarea :

2') orice vecinătate a lui M conţine puncte ale mulţimii A.

Teoremă. Orice mulţime majorată are o margine superioară.

Demonstraţie. Vom arăta cum putem construi efectiv numărul M, demonstrînd prin aceasta şi existenţa sa. Fie n primul număr întreg la stînga căruia se găsesc *toate* punctele mulţimii A ; $n - 1$ va fi partea întreagă a numărului M. Intervalul $(n-1, n)$ îl împărţim în zece intervale egale ; fie n_1 cel mai mic număr din diviziune, la stînga căruia se găsesc toate punctele mulţimii A ; $n_1 - 1$ va fi prima zecimală a numărului A.

Dacă continuăm, obţinem pe această cale numărul M sub formă zecimală.

Acest număr este unic, deoarece, dacă ar mai fi unul $M_1 > M$, pentru $\varepsilon > 0$ dat de

$$\varepsilon = \frac{M_1 - M}{2},$$

ar exista un număr $a' \in A$ şi $a' > M_1 - \frac{M_1 - M}{2} = \frac{M_1 + M}{2}$, însă neegalităţile pe care trebuie să le satisfacă a'

$$a' \leqslant M, \quad a' > \frac{M_1 + M}{2} > M$$

sînt contradictorii.

În mod analog definim o *margine inferioară* (cel mai mare minorant) a mulţimii A prin condiţiile :

1) pentru orice $a \in A$ avem $a \geqslant m$;

2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $b \in A$ cu $b < m + \varepsilon$, acest număr b putînd fi chiar m, dacă $m \in A$.

Condiţia 2 este echivalentă cu următoarea :

2') orice vecinătate a punctului m conţine puncte ale mulţimii A.

Existenţa şi unicitatea acestui punct se demonstrează în mod asemănător, construindu-l efectiv.

Exemple

1) Mulţimea de numere $\left(\frac{-1}{n}\right)^n$, n natural, este mărginită inferior şi superior de $m = -1$, $M = \frac{1}{4}$ şi ambele puncte aparţin mulţimii.

2) Mulţimea de numere $u_n = \frac{n-1}{n}$, cu n natural, este de asemenea mărginită ; $m = 0$ şi $M = 1$; punctul m aparţine mulţimii, însă M nu aparţine.

Marginile inferioară m și superioară M ale mulțimii A se notează

$$m = \inf A, \quad M = \sup A$$

și pentru orice $a \in A$ avem

$$m \leqslant a \leqslant M.$$

4. Punct de acumulare al unei mulțimi

Fie A o mulțime de puncte și α un punct care aparține mulțimii sau nu. Spunem că α este un *punct de acumulare* al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui α conține cel puțin un punct al mulțimii A în afară de punctul α, deci

$$V \cap A - \{\alpha\} \neq \emptyset.$$

Din definiție rezultă că orice vecinătate V a lui α conține o infinitate de puncte ale mulțimii A. Orice punct de acumulare al lui A este punct aderent al lui A, însă pot exista puncte aderente ale lui A fără să fie puncte de acumulare ale lui A.

Exemple

1) Mulțimea $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ are punctul 0 punct de acumulare, însă punctul 0 nu aparține mulțimii.

2) Mulțimea $A = [1, 2)$ are orice punct al său punct de acumulare, capetele intervalului 1 și 2 sînt tot puncte de acumulare ale mulțimii A, $1 \in A$, însă $2 \notin A$.

3) O mulțime finită nu are puncte de acumulare. Mulțimea $\{1, 5, 7, 9\}$ are toate punctele aderente, însă nu are puncte de acumulare.

Un punct al mulțimii A care nu este punct de acumulare se numește *punct izolat*. Mulțimile finite sînt formate numai din puncte izolate. Mulțimea numerelor naturale este formată numai din puncte izolate. Există deci mulțimi infinite care nu au puncte de acumulare, însă orice mulțime care are un punct de acumulare este infinită.

O mulțime formată numai din puncte izolate se numește *mulțime discretă*. Se poate arăta că orice mulțime discretă este finită sau numărabilă. Mulțimile finite sînt discrete. Mulțimea numerelor întregi este o mulțime discretă.

Teoremă. Condiția necesară și suficientă ca o mulțime să fie închisă este ca să-și conțină punctele de acumulare.

Demonstrație. O mulțime A închisă își conține punctele aderente.

Punctele de acumulare sînt puncte aderente, deci sînt conținute în mulțimea A. Reciproc, să presupunem că A își conține toate punctele de acumulare. Fie x_0 un punct aderent al lui A; dacă prin absurd $x_0 \notin A$, atunci x_0 este punct de acumulare al lui A (deoarece orice vecinătate a lui x_0 conține un punct al lui A) și, cum A își conține punctele de acumulare, $x_0 \in A$.

Teorema este demonstrată.

În legătură cu mulţimile *mărginite* şi infinite avem

Teorema lui Weierstrass-Bolzano. O mulţime mărginită şi infinită are cel puţin un punct de acumulare.

Demonstraţie. Fie A o mulţime mărginită şi infinită de puncte. Fiind mărginită, urmează că toate punctele sale aparţin unui segment $[a, b]$ cu a, b numere raţionale. Să împărţim segmentul $[a, b]$ în două părţi egale cu ajutorul punctului c. Mulţimea A este infinită, deci cel puţin unul din segmentele $[a, c]$ sau $[c, b]$ va avea o infinitate de puncte din A. Să presupunem că este segmentul $[c, b]$; îl notăm $[a_1, b_1]$; numerele a_1, b_1 sînt raţionale şi $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ ş.a.m.d. Să presupunem că am găsit două numere raţionale a_n, b_n, astfel încît segmentul a_n, b_n conţine o infinitate de puncte din mulţimea A şi

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Să împărţim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părţi egale. Deoarece segmentul $[a_n, b_n]$ conţine o infinitate de puncte din A, cel puţin una din cele două părţi conţine o infinitate de puncte din A.

Să notăm acea parte cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Numerele a_{n+1}, b_{n+1} sînt raţionale şi

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n,\ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Obţinem astfel prin inducţie completă şirul de intervale

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

unde şirurile de numere

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

$$b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

au următoarele proprietăţi:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$

2) $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$

3) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ pentru orice $n \in N$, $b_p > a_q$, $p, q \in N$.

4) Segmentul $[a_n, b_n]$ conţine o infinitate de puncte ale mulţimii A.

Dacă ne amintim cele spuse la numere iraţionale, urmează că cele două şiruri (a_n), (b_n) definesc un număr real x_0.

Să arătăm că x_0 este punct de acumulare al lui A. Fie V o vecinătate a lui x_0, $V = (c, d)$. Putem alege pe n suficient de mare, astfel încît să avem

$$c < a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n < d.$$

Însă $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de puncte ale mulțimii A, deci vecinătatea V a lui x_0 conține o infinitate de puncte a lui A, în consecință, x_0 este punct de acumulare al lui A.

Dacă mulțimea A nu este închisă, se poate ca punctul x_0 să nu aparțină lui A.

Exemple

1) Mulțimea $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ are punctul 0 punct de acumulare, însă nu-i aparține.

2) Mulțimea $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ este infinită, însă nu are punct de acumulare, deoarece nu este mărginită.

3) Intervalul (a, b) are toate punctele sale puncte de acumulare. Capetele intervalului (a, b) sînt tot puncte de acumulare, dar nu aparțin intervalului.

5. Limita superioară și limita inferioară

Conform teoremei precedente urmează că orice mulțime A mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare. Evident, o astfel de mulțime poate avea mai multe puncte de acumulare, chiar și o infinitate. Fie A' mulțimea punctelor de acumulare.

Mulțimea A fiind mărginită, urmează că și A' este mărginită.

Marginea superioară a mulțimii A' se numește ***limita superioară a mulțimii*** A, o notăm cu L

$$L = \overline{\lim}\ A = \lim \sup\ A$$

și are următoarele proprietăți : pentru orice $\varepsilon > 0$:

1) există o infinitate de numere $a \in A$ cu $a > L - \varepsilon$;

2) există un număr finit de numere $b \in A$ cu $b > L + \varepsilon$.

Într-adevăr, la dreapta lui $L + \varepsilon$ nu poate să existe un număr infinit de puncte ale mulțimii, deoarece, în acest caz, conform teoremei lui Weierstrass-Bolzano, ar avea un punct de acumulare, $L' > L$ și L nu ar mai fi marginea superioară a mulțimii A'.

La dreapta lui $L - \varepsilon$ trebuie să existe o infinitate de puncte ale mulțimii A, deoarece L este punct de acumulare.

În mod asemănător, marginea inferioară a mulțimii A' o vom numi ***limita inferioară a mulțimii*** A ; o notăm cu l

$$l = \underline{\lim}\ A = \lim \inf\ A$$

și are următoarele proprietăți, pentru orice $\varepsilon > 0$:

1) există o infinitate de numere $a \in A$ cu $a < l + \varepsilon$;

2) există un număr finit de numere $b \in A$ cu $b < l - \varepsilon$ și se demonstrează ca mai sus.

Numerele m, M, l, L asociate mulţimii A satisfac inegalităţile

$$m \leqslant l \leqslant L \leqslant M.$$

Exemple

1) Mulţimea $\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$ are $m = -\frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{4}$, $l = L = 0$. Numerele l şi L nu aparţin mulţimii.

2) Mulţimea $\left\{\sin\ n\ \frac{\pi}{2}\right\}$, n întreg, are $m = -1$, $M = 1$, $l = -1$, $L = 1$ şi toate aparţin mulţimii.

3) Mulţimea $\left\{2^{\frac{n+1}{n}}\right\}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ are $m = 2$, $M = 4$ şi $L = l = 2$. Numerele m, l, L nu aparţin mulţimii.

6. Mulţimi compacte

O mulţime C de numere reale se numeşte mulţime *compactă* dacă este *închisă* şi *mărginită*.

Exemple

1) O mulţime finită $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este închisă şi mărginită, deci este compactă.

2) Un interval închis $[a, b]$ sau o reuniune finită de intervale închise $\bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ este o mulţime compactă.

3) Mulţimea numerelor reale $x \geqslant a$ nu este compactă, deoarece nu este mărginită.

4) Dreapta reală R nu este compactă, deoarece nu este mărginită.

Vom spune că o familie de mulţimi $\{B_1, B_2, \ldots\}$ constituie o *acoperire* a mulţimii A dacă $A \subset \bigcup\limits_k B_k$, adică orice punct $x \in A$ aparţine cel puţin unei mulţimi B_k.

Dacă mulţimea $\{B_1, B_2, \ldots\}$ este finită, spunem că ea formează o *acoperire finită* a mulţimii A.

În legătură cu mulţimile compacte avem

Teorema lui Borel-Lebesgue. Dacă C este o mulţime compactă, din orice acoperire a sa cu intervale deschise se poate extrage o acoperire finită a sa.

Demonstraţie. Fie $(I_\alpha)_{\alpha \in I}$ o acoperire a mulţimii C formată din intervale deschise.

1) Dacă $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$ este finită, n intervale $I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots, I_{\alpha_n}$ cu $x_k \in I_{\alpha_k}$ constituie o acoperire a mulţimii C.

2) Să presupunem că C este infinită; fiind compactă, este mărginită, deci $C \subset [a, b]$ a, b numere raţionale. Vom demonstra prin reducere la absurd. Vom presupune că C nu admite o acoperire finită de intervale deschise şi vom ajunge la o contradicţie. Să împărţim intervalul $[a, b]$ în două subintervale egale; mulţimea C se va împărţi în două submulţimi C_1, C_2, $C = C_1 \cup C_2$, conţinute respectiv în cele două subintervale. Dacă fiecare din mulţimile C_1,

C_2 ar putea fi acoperită cu un număr finit de intervale deschise, reuniunea lor, mulțimea C, ar putea fi acoperită cu un număr finit de intervale deschise, în contradicție cu afirmația făcută. Să presupunem că C_1 nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale deschise; să notăm cu $[a_1, b_1]$ intervalul care conține pe C_1, deci

$$C_1 = [a_1, b_1] \cap C.$$

Mulțimea C_1 este neapărat infinită. Avem, de asemenea,

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b, \qquad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Să presupunem că am găsit două numere raționale $a_n < b_n$, astfel încît $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$, iar mulțimea $C_n = [a_n, b_n] \cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale deschise. Mulțimea C_n este infinită.

Împărțim intervalul $[a_n, b_n]$ în două părți egale prin punctul c_n. În baza aceluiași raționament, cel puțin una din mulțimile $[a_n, c_n] \cap C$ sau $[c_n, b_n] \cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familia (I_α); notăm acea mulțime cu

$$C_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \cap C,$$

unde

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$$

și

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

În modul acesta se construiesc două șiruri de numere raționale

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$

2) $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$

cu

3) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}, \quad b_m > a_n, \; m, \; n \in N.$

4) Mulțimea $C_n = [a_n, b_n] \cap C$ nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie și pentru orice n mulțimea C_n conține o infinitate de puncte ale mulțimii C.

Șirurile (a_n), (b_n) definesc un număr x_0; $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$ (*A*, cap. I. § 2 al. 2). Punctul x_0 este punct de acumulare al mulțimii C, întrucît orice interval $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de puncte ale lui C. Punctul $x_0 \in C$, deoarece C este compactă și, prin urmare, își conține toate punctele de acumulare.

Punctul x_0 fiind punct de acumulare, există un interval I din familia (I_α) care conține pe x_0, deci I este o vecinătate a lui x_0.

Putem găsi un număr n astfel încît $[a_n, b_n] \subset I$, deoarece $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ cînd $n \to \infty$; prin urmare, $[a_n, b_n] \cap C \subset I$; am găsit astfel un interval din familie care acoperă mulțimea $[a_n, b_n] \cap C$, ceea ce este în contradicție cu proprietatea 4.

Ipoteza pe care am făcut-o mai sus, anume că mulțimea compactă C nu poate fi acoperită cu o mulțime finită de intervale din familia $(I_\alpha)_{\alpha \in I}$, a dus la o contrazicere; lema este demonstrată.

§ 2. NUMERELE IMPROPRII $+\infty$ ŞI $-\infty$

1. Mulţimi nemărginite

O mulţime A care nu este mărginită superior spunem că este mărginită superior de $+\infty$ (plus infinit). Marginea sa superioară este $+\infty$ şi se scrie

$$\sup A = +\infty \text{ sau } \sup_{x\in A} x = +\infty.$$

Din definiţia *marginii superioare* avem:

1) $x < +\infty$, pentru orice $x \in A$;

2) dacă $a < +\infty$ şi A nu este mărginită superior, există cel puţin un punct $x > a$ şi $x \in A$.

Exemple

1) Mulţimea numerelor naturale este mărginită superior de $+\infty$

$$\sup N = +\infty.$$

2) Mulţimea numerelor reale este mărginită superior de $+\infty$

$$\sup R = +\infty.$$

Dacă R este mulţimea numerelor reale, atunci $x < +\infty$ pentru orice număr real $x \in R$.

O mulţime A care nu este mărginită inferior spunem că este mărginită inferior de $-\infty$ (minus infinit). Marginea sa inferioară este $-\infty$ şi se scrie

$$\inf A = -\infty \text{ sau } \inf_{x\in A} x = -\infty.$$

Din definiţia *marginii inferioare* avem:

1) $x > -\infty$, pentru orice $x \in A$;

2) dacă $a > -\infty$ şi A nu este mărginită inferior există cel puţin un punct $x < a$ şi $x \in A$.

Exemple

1) Mulţimea numerelor întregi este mărginită inferior de $-\infty$.
2) Mulţimea numerelor $(-1)^n 2^n$ este mărginită inferior de $-\infty$.

Dacă R este mulţimea numerelor reale, atunci $x > -\infty$ pentru orice număr real $x \in R$.

O mulţime A care nu este mărginită superior şi inferior spunem că este mărginită superior de $+\infty$ şi inferior de $-\infty$, care sînt, respectiv, marginile sale, superioară şi inferioară

$$m = \inf_{x\in A} x = -\infty, \quad M = \sup_{x\in A} x = +\infty.$$

Putem deci enunța propoziția:

Orice mulțime A are o margine superioară și o margine inferioară (finite sau infinite).

Mulțimea numerelor reale împreună cu $+\infty$ și $-\infty$ se numește *dreapta încheiată* și se notează cu $\overline{R}$.

Oricare ar fi $x \neq y$, $x, y \in R$, nu putem avea decît situațiile

$$-\infty < x < y < +\infty$$

sau

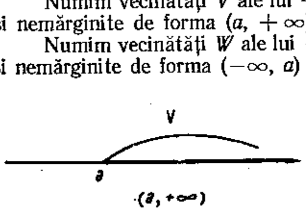
$$-\infty < y < x < +\infty.$$

Cu această structură de ordine, dreapta încheiată este o *mulțime total ordonată.*

2. Vecinătățile lui $+\infty$ și $-\infty$. Puncte de acumulare infinite

Numim vecinătăți V ale lui $+\infty$ mulțimile care conțin intervale deschise și nemărginite de forma $(a, +\infty)$ (fig. 23).

Numim vecinătăți W ale lui $-\infty$ mulțimile care conțin intervale deschise și nemărginite de forma $(-\infty, a)$ (fig. 24).



Fid. 23

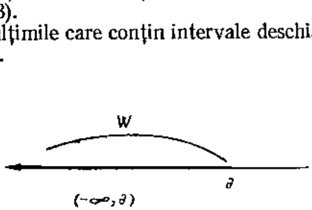


Fig. 24

Fie A o mulțime nemărginită superior. Proprietățile

1) $x < +\infty$ pentru orice $x \in A$,

2) dacă $a < +\infty$, $a \in A$, există cel puțin un $x > a$, $x \in A$, arată că $+\infty$ este punct de acumulare al mulțimii A, anume *limita superioară,* deci

$$+\infty = \lim\sup A.$$

În mod asemănător, pentru o mulțime A nemărginită inferior, proprietățile

1) $x > -\infty$ pentru orice $x \in A$,

2) dacă $a > -\infty$, $a \in A$, există cel puțin un $x < a$, $x \in A$, arată că $-\infty$ este punct de acumulare al mulțimii A, și anume *limita sa inferioară*

$$-\infty = \lim\inf A.$$

Mulțimea numerelor reale R are deci pe $+\infty$ limită superioară și pe $-\infty$ limită inferioară.

Cu introducerea lui $+\infty$ şi $-\infty$, teorema lui Weierstrass-Bolzano are următoarea formulare:

Orice mulţime infinită are cel puţin un punct de acumulare. Punctul de acumulare este finit dacă mulţimea este mărginită.

Unei mulţimi de puncte A i-am asociat astfel patru numere: m, M, l şi L

$$m = \inf A, \quad M = \sup A$$

$$l = \lim\inf A, \quad L = \lim\sup A$$

şi avem inegalităţile

$$-\infty \leqslant m \leqslant l \leqslant L \leqslant M \leqslant +\infty.$$

Exemple

1) Mulţimea $u_n = \sin\frac{n\pi}{2}$, $n \in N$ are $M = 1$, $m = -1$, $L = 1$, $l = -1$.

2) Mulţimea numerelor naturale $\{1, 2, \ldots, n, \ldots]$ are $m = 1$, $M = +\infty$, $l = L = +\infty$.

3) Mulţimea $u_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1}$, $n \in N$ are $m = -1$, $M = +1$, $l = -1, L = +1$.

3. Operaţiile cu $+\infty$ şi $-\infty$

Numerele improprii $+\infty$ şi $-\infty$ (se numesc astfel deoarece nu respectă toate operaţiile cu numere reale) sînt supuse la următoarele reguli de calcul:

1) $-(+\infty) = +(-\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +(+\infty) = +\infty$

2) $a \pm \infty = \pm\infty$ $(a \in R)$, $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$

3) $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

4) $a(-\infty) = -\infty \cdot a = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$, $a(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$

5) $\dfrac{a}{\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0$

6) $a^{\infty} = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$, $a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$

7) $(\pm\infty)^m = \begin{cases} 0, & m < 0 \\ (\pm 1)^m . \infty, & m > 0 \end{cases}$

Operaţiile $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0\,(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$ nu au sens. Tot fără sens sînt

$$0^0, \; 1^{\infty}, \; \frac{0}{0}, \; \infty^0.$$

$+\infty$ şi $-\infty$ se numesc şi *numere infinite*.

§ 3. ŞIRURI NUMERICE

1. Definiţie

Fie o mulţime E de elemente. O familie (parte, submulţime) a mulţimii E se mai notează şi

$$(a_n)_{n \in I}.$$

Mulţimea I se numeşte *mulţimea indicilor*, iar orice element $n \in I$ se numeşte *indice*. Dacă I este mulţimea numerelor naturale $N = \{1, 2, \ldots\}$, o familie de elemente ale mulţimii E

$$(a_n)_{n \in N}$$

se numeşte *şir*. Dacă a_n sînt numere reale, avem şiruri de numere reale, deci

D e f i n i ţ i e. Un şir de numere reale este o familie de numere reale

$$(a_n)_{n \in N}$$

cu indicii numere naturale.

De obicei, se notează un şir numai (a_n), înţelegîndu-se prin aceasta mulţimea

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se numesc termenii şirului ; a_n se numeşte *termenul general* sau termenul de *rangul n* al şirului.

E x e m p l e

1) Şirul 1, 2, 3, ... este şirul numerelor naturale.
2) Şirul 1, 3, 5, 7, ... este şirul numerelor naturale impare.
3) Şirul 1, 3, 1, 3, ... are ca termen general $a_n = 2 + (-1)^n$.
4) Şirul 1, 1, 1, 1, ... are ca termen general pe $a_n = 1$.

Prin *definiţie* vom spune că două şiruri (a_n), $(b)_n$ sînt egale dacă termenii corespunzători aceluiaşi indice sînt egali, adică

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n, \ldots$$

2. Şiruri mărginite. Şiruri nemărginite

Un şir de numere (a_n) este mărginit inferior dacă există un număr m astfel încît $a_n \geqslant m$ pentru orice $n \in N$.

Un şir de numere (a_n) este mărginit superior dacă există un număr M astfel încît $a_n \leqslant M$ pentru orice $n \in N$.

Un şir de numere (a_n) este mărginit dacă este mărginit superior și inferior, deci există două numere m şi M, $m < M$, astfel încît $m \leqslant a_n \leqslant M$ pentru orice $n \in N$.

Observaţie

Dacă $A = \max(|m|, |M|)$, atunci

$$|a_n| \leqslant A \text{ pentru orice } n \in N.$$

Un şir de numere (a_n) este nemărginit dacă, oricare ar fi numărul $B > 0$, există un termen a_n din şir astfel încît

$$|a_n| > B.$$

Exemple

1) Şirul $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$ este mărginit $m = \frac{1}{2}$, $M = 1$.

2) Şirul $\left((-1)^n \frac{1}{n^2}\right)$, $n \in N$ este mărginit, deoarece

$$|a_n| = \frac{1}{n^2} \leqslant 1.$$

3) Şirul $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ pentru $|a| > 1$ este nemărginit, iar pentru $|a| \leqslant 1$ este mărginit.

4) Şirul $\left(\frac{1}{n!}\right)$ este mărginit.

3. Şiruri monotone

Se spune că un şir de numere (a_n) este crescător dacă

$$a_1 \leqslant a_2 \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$$

şi că este strict crescător dacă

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$$

Exemple

1) Şirul numerelor naturale 1, 2, 3, ... este strict crescător.
2) Şirul 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, ... este crescător.

Se spune că un şir de numere (a_n) este descrescător dacă

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$$

şi că este strict descrescător dacă

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$$

Exemple

1) Şirul $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ este un şir strict descrescător.

2) Şirul $a, a, a, \ldots$ este un şir şi descrescător şi crescător; se numeşte *şir constant*,

3) Şirul 1, —1, +1, —1, +1, —1, ... nu este nici crescător, nici descrescător.

4) Dacă şirul $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este crescător, şirul opuselor $-a_1, -a_2, \ldots$ este descrescător.

Un şir crescător sau descrescător se numeşte *şir monoton.*

Un şir strict crescător sau strict descrescător se numeşte *şir strict monoton.*

Fie (a_n) un şir şi

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$$

un şir strict crescător de numere naturale. Şirul

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}, \ldots$$

se numeşte *subşir* al şirului iniţial.

Se verifică uşor că orice subşir al unui şir monoton este tot un şir monoton.

Exemple

1) În şirul $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, şirul $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ este un subşir. Primul şir este strict monoton; şirul al doilea este tot strict monoton.

2) Şirul 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, ... este monoton; subşirul 1, 3, 5, 7, ... este strict monoton.

4. Puncte limită

Un număr α este un punct limită al şirului

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

dacă orice vecinătate V a lui α conţine cel puţin un termen al şirului, diferit de α (numărul α poate să aparţină sau să nu aparţină şirului). Orice vecinătate V a lui α conţine o infinitate de termeni ai şirului. Dacă notăm cu $\mathfrak{L}$ mulţimea punctelor limită a şirului (a_n), se numeşte *limita superioară* a şirului (a_n) marginea superioară L a mulţimii $\mathfrak{L}$ şi se notează

$$L = \sup \mathfrak{L} = \lim \sup a_n = \overline{\lim}\, a_n.$$

Marginea inferioară l a mulţimii $\mathfrak{L}$ se numeşte limita inferioară a şirului (a_n) şi se notează

$$l = \inf \mathfrak{L} = \lim \inf a_n = \underline{\lim}\, a_n.$$

Din definiţia dată numerelor l şi L rezultă că au următoarele proprietăţi:

Pentru numărul l:

1) la stînga lui $l - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, se găseşte un număr finit de termeni ai şirului (a_n);

2) la stînga lui $l + \varepsilon$, se găseşte o infinitate de termeni ai şirului (a_n).

Într-adevăr, dacă la stînga lui $l - \varepsilon$ s-ar găsi o infinitate de termeni ai şirului (a_n), aceştia ar avea un punct limită diferit de l (eventual $-\infty$) şi l nu ar mai fi margine inferioară a mulţimii $\mathfrak{L}$.

La stînga lui $l + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, se găseşte o infinitate de termeni ai şirului, deoarece vecinătatea $(l - \varepsilon, \ l + \varepsilon)$ conţine o infinitate de termeni ai şirului, l fiind punct limită.

Pentru numărul L:

1) la dreapta lui $L + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, se găseşte un număr finit de termeni ai şirului (a_n);

2) la dreapta lui $L - \varepsilon$, se găseşte o infinitate de termeni ai şirului. Se verifică în mod asemănător.

Exemple

1) Şirul $\left(\sin \frac{n\pi}{4}\right)$, $n \in N$, are $M = 1$, $m = -1$ şi cinci puncte limită: $l_1 = -1$, $l_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $l_3 = 0$, $l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $l_5 = 1$, deci $L = 1$, $l = -1$.

2) Şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in N$, are $l = L = 0$.

3) Şirul $(-1)^n \left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \in N$, are $l = L = 0$.

§ 4. ŞIRURI CONVERGENTE

1. Definiţia I

Un şir de numere

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

se numeşte convergent dacă există un număr s astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un număr natural $N(\varepsilon)$ (care depinde de ε) astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$|s - s_n| < \varepsilon.$$

Numărul s se numeşte limita şirului (s_n); se notează

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

şi se citeşte „limita termenului general s_n cînd n tinde către infinit este numărul s".

Dacă un şir este convergent se spune că are *limită*.

2. Definiţia II

Un şir de numere (s_n) este convergent dacă există un număr s astfel încît în afara fiecărei vecinătăţi a lui s se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului.

Fie $\varepsilon > 0$ un număr *oarecare*. Din faptul că în afara oricărei vecinătăţi a lui s există numai un număr finit de termeni ai șirului rezultă

$$| s - s_n | \geqslant \varepsilon \tag{1}$$

numai pentru $n \leqslant N(\varepsilon)$, $N(\varepsilon)$ fiind un număr natural care depinde de ε. Pentru $n > N(\varepsilon)$, toţi termenii şirului sînt în vecinătatea

$$| s - s_n | < \varepsilon,$$

și șirul este convergent conform cu definiţia I.

Reciproc, prima definiţie implică pe a doua. Într-adevăr, deoarece pentru $n > N(\varepsilon)$ avem

$$| s - s_n | < \varepsilon$$

urmează că $| s - s_n | \geqslant \varepsilon$ numai, cel mult, pentru $n = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon)$, adică pentru un număr finit de termeni ai șirului.

3. Definiţia III

Un şir este convergent dacă $L = l$.

Dacă $l = L = s$, atunci, conform proprietăţilor lui l și L, pentru $\varepsilon > 0$ şi arbitrar la stînga lui $s - \varepsilon$ se va găsi un număr finit de termeni ai şirului, iar la dreapta lui $s + \varepsilon$ se va găsi tot un număr finit de termeni ai şirului, deci de la un rang $N(\varepsilon)$ înainte toţi termenii șirului satisfac neegalitatea

$$| s - s_n | < \varepsilon.$$

Invers, dacă $| s - s_n | < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$, urmează că la stînga lui $s - \varepsilon$ se găsește un număr finit de termeni ai șirului, iar la dreapta lui $s + \varepsilon$ se găsește un număr finit de termeni ai șirului, deci s este și limita superioară, şi limita inferioară; $s = l$, $s = L$, deci $l = L$.

Un şir care nu este convergent se numește *şir divergent*.

Exemple

1) Şirul $\frac{1}{1}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$ este convergent şi are limita zero. Într-adevăr

$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$, pentru $n > N(\varepsilon)$, cu $N(\varepsilon)$ primul întreg $\geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$; dacă $\varepsilon = \frac{1}{10^8}$, $N(\varepsilon) = 10^4$.

2) Şirul $u_n = n!$ este divergent; $\lim\limits_{n\to\infty} n! = +\infty$.

3) Şirul $u_n = (-1)^n + 2$ este divergent, deoarece are două puncte limită, $l = 1$ şi $L = 3$. Un şir care are mai multe puncte limită se numeşte şi *şir oscilant*.

4. Subşiruri convergente

Să demonstrăm următoarea

Teoremă. Orice subşir al unui şir convergent este convergent.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, conform definiţiei II, în afara oricărei vecinătăţi a lui s se află un număr finit de termeni ai şirului, deci cu atît mai mult un număr finit de termeni ai oricărui subşir al său. Deci orice subşir al unui şir convergent are aceeaşi limită cu şirul iniţial.

Exemplu

1) Şirul $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Subşirul $\left(\frac{1}{(2n)^2}\right)$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} = 0$.

În legătură cu şirurile mărginite să demonstrăm

Lema lui Cesàro. Orice şir mărginit conţine un subşir convergent.

Demonstraţie. Dacă (x_n) este un şir mărginit, putem găsi două numere raţionale a, b astfel încît

$$a < x_n < b, \qquad n \in N.$$

Să împărţim intervalul $[a, b]$ în două părţi egale cu $c = \frac{b-a}{2}$.

Numărul c este raţional. În unul din intervalele $[a, c]$ sau $[c, b]$ există o infinitate de termeni ai şirului, deoarece reuniunea lor conţine toţi termenii şirului. Fie $[a, c]$ acest interval; îl notăm cu $[a_1, b_1]$ şi

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b, \qquad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Procedeul se continuă. Fie un segment $[a_n, b_n]$, (a_n, b_n, numere raţionale), care conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n)

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Împărţim segmentul $[a_n, b_n]$ în două părţi egale cu numărul raţional $c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$.

Unul din segmentele $[a_n, c_n]$ sau $[c_n, b_n]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n). Notăm cu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ unul din aceste două segmente, care conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n). Avem

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

şi

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n.$$

Am obţinut astfel două şiruri de numere raţionale (a_n), $b_n)$, cu proprietăţile :

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$
2) $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$
3) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, $b_p > a_q$, $p, q, n \in N$.
4) Fiecare din intervalele $[a_n, b_n]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n)

Din proprietăţile 1, 2, 3 rezultă că există un singur număr x_0, astfel încît

$$a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n, \quad \text{pentru orice } n \in N.$$

Să construim acum un subşir al şirului (x_n) convergent către x_0.

Fie x_{n_1} un element al şirului (x_n) şi $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Deoarece intervalul $[a_2, b_2]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului x_n, există un termen x_{n_2} al şirului (x_n), cu $n_2 > n_1$ şi $x_{n_2} \in [a_2 . b_2]$. Să presupunem că am ales un termen x_{n_p} al şirului (x_n) şi $x_{n_p} \in [a_p, b_p]$. Deoarece intervalul $[a_{p+1}, b_{p+1}]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (x_n), există un termen $x_{n_{p+1}}$ cu $n_{p+1} > n_p$ şi $x_{n_{p+1}} \in [a_{p+1}, b_{p+1}]$. Am arătat astfel prin inducţie completă că putem găsi un şir (x_{n_p}), $1 \leqslant p < \infty$, astfel încît

1) $n_1 > n_2 > \ldots > n_p > \ldots$
2) $a_p \leqslant x_{n_p} \leqslant b_p$, pentru orice $p \in N$.

Şirul (x_{n_p}) este un subşir al şirului (x_n). Să arătăm că este convergent către x_0. Deoarece

$$a_p \leqslant x_0 \leqslant b_p$$
$$a_p \leqslant x_{n_p} \leqslant b_p,$$

urmează

$$|x_{n_p} - x_0| \leqslant b_p - a_p = \frac{b-a}{2^p}$$

pentru $p = 1, 2, \ldots$. Însă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $p > N(\varepsilon)$ vom avea

$$|x_{n_p} - x_0| < \varepsilon,$$

deoarece $\dfrac{b-a}{2^p} \to 0$ cînd $p \to \infty$. Prin urmare, subşirul (x_{n_p}) este convergent către x_0 şi lema este demonstrată.

În definiţia convergenţei unui şir intervine însăşi limita şirului, care numai în rare cazuri este cunoscută. Cauchy a dat un criteriu pentru a determina dacă un şir este convergent, fără să intervină limita şirului considerat.

5. Criteriul general al lui Cauchy

necesar şi suficient

Un şir de numere

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

este convergent dacă şi numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ şi p întreg $\geqslant 1$ să avem

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. *Condiţia este necesară.* Într-adevăr, şirul, fiind convergent, are o limită s; deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$|s - s_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

deci şi

$$|s - s_{n+p}| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

pentru $p \geqslant 1$, deoarece $n + p > N(\varepsilon)$. În egalitatea

$$(s - s_{n+p}) + (s_n - s) = s_n - s_{n+p}$$

avem

$$|s_{n+p} - s_n| \leqslant |s - s_{n+p}| + |s - s_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Condiţia este, aşadar, necesară.

Condiţia este suficientă. Să dăm lui n valoarea fixă N.

Conform ipotezei

$$|s_{N+p} - s_N| < \varepsilon, \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

deci, cu excepţia termenilor $s_1, s_2, \ldots, s_{N-1}$, toţi ceilalţi termeni s_{N+p} $(p = 1, 2, \ldots)$ se află în intervalul $(s_N - \varepsilon, s_N + \varepsilon)$. Să presupunem că $L \neq l$; rezultă de aici că L şi l se găsesc în acest interval, deci

$$0 \leqslant L - l < 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, iar L şi l fixe, diferenţa lor nu poate fi arbitrar de mică decît dacă $L = l$, iar şirul este convergent conform definiţiei III.

Exemple

1) Şirul $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ este convergent.

$|s_{n+p} - s_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{n+1}$, deoarece sumele $\left(-\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$, $\left(-\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5}\right)$ ş.a.m.d. sînt toate negative.

Pentru $n > N(\varepsilon)$, unde $N(\varepsilon)$ este cel mai mare întreg $\leqslant \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, avem

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

2) Şirul $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ este divergent. Avem $s_{n+p} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}$; pentru $p \geqslant n$

$$|s_{n+p} - s_n| > \frac{p}{n+p} \geqslant \frac{1}{2}$$

şi condiţia din criteriul lui Cauchy nu este îndeplinită.

O b s e r v a ţ i e

Dacă la un şir convergent se adaugă (sau se suprimă) un număr finit de termeni, şirul obţinut este convergent şi are aceeaşi limită, deoarece, prin adăugarea (sau suprimarea) unui număr finit de termeni, în afara fiecărei vecinătăţi a punctului limită s se află tot un număr finit de termeni ai şirului obţinut, deci şi acesta are limita s.

6. Şiruri divergente

Spunem că un şir (a_n) are limita $+\infty$ dacă orice vecinătate a lui $+\infty$ conţine toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit sau:

Un şir (a_n) are limita $+\infty$ dacă pentru orice număr A există un număr $N(A)$ astfel încît pentru orice $n > N(A)$ să avem

$$a_n > A$$

şi se scrie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{sau} \quad a_n \to +\infty.$$

E x e m p l e

1) Şirul numerelor $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$ are limita $+\infty$.
2) Şirul numerelor $2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots$ are limita $+\infty$.

Spunem că un şir (b_n) are limita $-\infty$ dacă orice vecinătate a lui $-\infty$ conţine toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit sau:

Un şir (b_n) are limita $-\infty$ dacă pentru orice număr B există un număr $N(B)$ astfel încît pentru orice $n > N(B)$ să avem

$$b_n < B$$

şi se scrie

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \text{sau} \quad b_n \to -\infty.$$

E x e m p l e

1) Şirul $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$ are limita $-\infty$.
2) Şirul $(-1)^n n^2$ are două puncte limită $L = +\infty$, $l = -\infty$.

Un şir care are *limita infinită* este un *şir divergent.*

Tot şir divergent este un şir care are mai multe puncte limită, adică $l \neq L$; astfel de şiruri se mai numesc şi *oscilante.*

E x e m p l u

Şirul $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ are $l = -1$, $L = 1$, deci nu este convergent; este un şir oscilant (divergent).

§ 5. ŞIRURI MONOTONE

1. Şiruri monotone convergente

Teoremă. Un şir monoton şi mărginit este convergent.

Demonstraţie. Şirul (s_n), fiind mărginit, nu poate avea limite infinite. Rămîne să mai arătăm că nu are decît un punct limită.

Să presupunem că are două puncte limită l şi L, $l < L$; dacă împărţim intervalul (l, L) în trei, fie $\varepsilon = \frac{L-l}{3}$, intervalele $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ sînt disjuncte (fig. 25).

Fie n_1 un indice pentru care s_{n_1} aparţine primului interval.

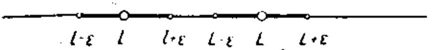


Fig. 25

Există un indice $n_2 > n_1$ pentru care s_{n_2} aparţine celui de-al doilea interval, deoarece, în caz contrar, intervalul al doilea nu ar mai conţine o infinitate de termeni şi L nu ar mai fi punct limită. În consecinţă, şirul fiind presupus crescător,

$$s_{n_1} < s_{n_2}, \quad n_2 > n_1. \tag{1}$$

Pentru $n > n_2$, intervalul al doilea nu poate conţine toţi termenii şirului, deoarece, în acest caz, în primul interval am avea un număr finit şi l nu ar mai fi punct limită; rezultă pentru $n = n_3 > n_2$ că

$$s_{n_2} > s_{n_3}, \quad n_3 > n_2, \tag{2}$$

însă aceste două inegalităţi (1), (2) sînt incompatibile cu monotonia şirului considerat, deci $l = L$, şirul este convergent.
Teorema este demonstrată.

2. Şiruri monotone divergente

Teoremă. Un şir monoton şi nemărginit este divergent.

Demonstraţie. Să presupunem că şirul este crescător şi nu este mărginit superior. Pentru orice număr $A > 0$ există un număr n_0 pentru care avem

$$s_{n_0} > A$$

şi cum şirul este nedescrescător urmează că pentru orice $n > n_0$ avem $s_n > A$, deci şirul este divergent, avînd ca limită $+\infty$.

În mod analog se arată că şirurile monoton descrescătoare nemărginite inferior sînt divergente şi au ca limită $-\infty$.

Prin urmare, şirurile monotone au o singură limită, finită sau infinită. Şirurile monotone nu sînt oscilante.

Exemple

1) Şirul $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ nu este convergent (B. cap. I, § 4, al. 5), este monoton crescător, deci are limita $+\infty$.

2) Şirul $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este convergent. Şirul este mărginit; într-adevăr, dezvoltînd după binomul lui Newton

$$u_n = 1 + \frac{1}{n}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n^n}C_n^n = 1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{1!} + \ldots + \frac{1}{n^n}\cdot\frac{n!}{n!}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{n!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$u_n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Şirul este crescător

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

şi $u_{n+1} > u_n$,
deoarece fiecare termen ce intervine în dezvoltarea lui u_{n+1} este mai mare sau cel puţin egal cu termenul corespunzător din u_n.

3) Şirul $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{np}$ este convergent. Şirul este crescător

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{np+1} + \frac{1}{np+2} + \ldots + \frac{1}{p(n+1)} - \frac{1}{n} > \frac{p}{p(n+1)} - \frac{1}{n+1} = 0.$$

Şirul este mărginit, deoarece

$$u_n < \frac{np}{n} = p,$$

deci este convergent.

3. Revenire la şirurile de numere raţionale, aproximantele prin lipsă sau exces ale unui număr iraţional

Să considerăm şirurile monotone

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$$
$$b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$$

astfel încît pentru orice indici p şi q să avem

$$a_p < b_q \tag{1}$$

şi, în plus, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$b_n - a_n < \varepsilon \tag{2}$$

şiruri care au aceleaşi proprietăţi ca şirurile (l_n) şi (e_n), care aproximează un număr iraţional (A, cap. I, § 2, al. 2), unde ε era $\frac{1}{10^n}$.

Să arătăm că cele două şiruri (a_n) şi (b_n) au aceeaşi limită. Deoarece $a_q < b_0$, urmează că şirul (a_n) este monoton crescător mărginit, deci este convergent şi are limita α. De asemenea, din $b_p > a_0$ urmează că şirul monoton descrescător (b_n) este mărginit inferior, este deci convergent, şi are limita β. Pentru orice $n \in N$ avem şirul de neegalităţi

$$a_n < \alpha \leqslant \beta < b_n,$$

deci

$$\beta - \alpha < b_n - a_n < \varepsilon$$

pentru $n > N$, de unde rezultă $\beta - \alpha < \varepsilon$, însă β şi α sînt fixe, iar inegalitatea trebuie să se menţină pentru orice $\varepsilon > 0$. Diferenţa între cele două numere α şi β este un număr şi această diferenţă nu poate rămîne arbitrar de mică decît dacă $\alpha = \beta$.

Dacă reprezentăm pe o axă numerele a_n, b_n, $n = 1, 2, \cdots$ urmează că avem şirul infinit de incluziuni

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots,$$

iar intersecţia tuturor acestor intervale nu este vidă, ci, conform rezultatului de mai sus, este numărul α limita comună a celor două şiruri. În cazul cînd şirurile (a_n) şi (b_n) sînt şiruri de numere raţionale, aproximantele prin lipsă sau exces ale unui număr iraţional α, limita comună este numărul iraţional α.

Aplicaţie

Să considerăm ecuaţia $x^n = a$, $a \geqslant 0$, real şi n natural. Să arătăm că această ecuaţie are o singură rădăcină pozitivă. Există un număr natural $p > a$; deoarece $n \geqslant 1$, avem $p^n > p > a$. deci numărul a se găseşte cuprins între două numere consecutive din următorul şir

$$0^n,\ 1^n,\ 2^n, \ldots, p^n.$$

Să presupunem

$$k^n \leqslant a < (k+1)^n, \qquad k \geqslant 0.$$

Fie $k < k + \frac{1}{2} < k + 1$. Numărul a va fi cuprins între

$$k^n \text{ şi } \left(k + \frac{1}{2}\right)^n \text{sau între } \left(k + \frac{1}{2}\right)^n \text{şi } (k+1)^n.$$

Fie

$$k^n \leqslant a < \left(k + \frac{1}{2}\right)^n;$$

notăm $x_1 = k$, $y_1 = k + \frac{1}{2}$; avem $y_1 - x_1 = \frac{1}{2}$, $x_1 > 0$.

Să presupunem că am găsit două numere x_p şi y_p, astfel încît

$$x_p^n \leqslant a < y_p^n, \; y_p - x_p = \frac{1}{2^p}, \; x_p > 0.$$

Numărul $x_p + \frac{1}{2^{n-1}}$ este cuprins între x_p şi y_p, deci

$$x_p < x_p + \frac{1}{2^{p+1}} < y_p$$

sau

$$x_p^n < \left(x_p + \frac{1}{2^{p+1}}\right)^n < y_p^n.$$

Numărul a este cuprins între x_p^n şi y_p^n, deci se găseşte într-unul din intervalele

$$\left(x_p^n, \left(x_p + \frac{1}{2^{p+1}}\right)^n\right); \; \left(\left(x_p + \frac{1}{2^{p+1}}\right)^n, y_p^n\right).$$

Să notăm cu (x_{p+1}, y_{p+1}) intervalul care îl cuprinde; numerele x_{p+1}, y_{p+1} au proprietăţile

$$x_{p+1}^n \leqslant a < y_{p+1}^n$$

$$x_p \leqslant x_{p+1} < y_{p+1} \leqslant y_p, \quad y_{p+1} - x_{p+1} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

În modul acesta construim două şiruri de numere

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_p \leqslant \ldots \tag{1}$$

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant \ldots \geqslant y_p \geqslant \ldots \tag{2}$$

cu

$$y_p - x_p = \frac{1}{2^p} \tag{3}$$

şi

$$x_p^n \leqslant a < y_p^n, \quad x_p < y_q, \; p, q \in N. \tag{4}$$

Şirurile (1) şi (2) definesc un număr x_0, limita comună a lor

$$\lim_{p\to\infty} x_p^n = \lim_{p\to\infty} y_p^n = x_0^p = a$$

şi x_0 este soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^n = a$. Soluţia este unică, deoarece dacă ar fi două, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < x_2$, am avea $x_1^n < x_2^n$, însă $x_1^n = a$, $x_2^n = a$, deci $x_1^n = x_2^n$; am ajuns la o contradicţie, deci $x_1 = x_2$.

După cum am spus (A, cap. I, § 2, al. 9), soluţia pozitivă unică a ecuaţiei $x^n = a$ se notează $\sqrt[n]{a}$ sau $a^{\frac{1}{n}}$ şi se numeşte rădăcină de ordinul n a lui a.

§ 6. OPERAŢII CU ŞIRURI CONVERGENTE

1. Adunarea şirurilor convergente

Teorema I. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente, atunci şirul sumă $(a_n + b_n)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Demonstraţie. Fie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta.$$

Şirurile fiind convergente urmează că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N'(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N'(\varepsilon)$ avem

$$|\alpha - a_n| < \varepsilon$$

şi un număr $N''(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N''(\varepsilon)$ avem

$$|\beta - b_n| < \varepsilon.$$

Să plecăm de la egalitatea

$$(\alpha + \beta) - (a_n + b_n) = (\alpha - a_n) + (\beta - b_n)$$

căreia îi aplicăm neegalităţile modulului, deci

$$|\alpha + \beta - a_n - b_n| \leqslant |\alpha - a_n| + |\beta - b_n| < 2\varepsilon$$

pentru orice $n > N(\varepsilon) = \max (N'(\varepsilon), N''(\varepsilon))$, de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta.$$

Rezultatul se extinde cu uşurinţă la o sumă finită de şiruri convergente $(a_{n,i})$, $i = 1, 2, \ldots, p$; avem

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n,1} + a_{n,2} + \ldots + a_{n,p}) = \lim_{n\to\infty} a_{n,1} + \lim_{n\to\infty} a_{n,2} + \ldots + \lim_{n\to\infty} a_{n,p}$$

şi se citeşte: suma unui număr finit de şiruri convergente este un şir convergent şi limita sumei este egală cu suma limitelor.

Observaţie

Teorema demonstrată rămîne adevărată şi în cazul cînd unul sau ambele şiruri au limita infinită.

Putem scrie

1) dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, atunci $a_n + b_n \to +\infty$;

2) dacă $a_n \to \alpha$, $b_n \to +\infty$, atunci $a_n + b_n \to +\infty$;

3) dacă $a_n \to \alpha$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n + b_n \to -\infty$;

4) dacă $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n + b_n \to -\infty$.

În cazul cînd $a_n \to +\infty$ și $b_n \to -\infty$, despre șirul $(a_n + b_n)$ nu putem afirma nimic. Operația $+\infty - \infty$ este lipsită de sens.

Aceste reguli justifică regulile de calcul impuse numerelor infinite $+\infty$ și $-\infty$.

2. Scăderea șirurilor convergente

Teorema 11. Dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri convergente, atunci șirul $(a_n - b_n)$ este de asemenea convergent și

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

sau limita diferenței a două șiruri convergente există și este egală cu diferența limitelor celor două șiruri.

Demonstrație. Folosind datele de la teorema precedentă, avem

$$(\alpha - \beta) - (a_n - b_n) = (\alpha - a_n) - (\beta - b_n),$$

și aplicînd inegalitățile modulului, avem

$$|(\alpha - \beta) - (a_n - b_n)| \leqslant |\alpha - a_n| + |\beta - b_n| < 2\varepsilon$$

pentru orice $n > N(\varepsilon) = \max\,(N'(\varepsilon), N''(\varepsilon))$, de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha - \beta.$$

Observații

1) Reciproca teoremei I (sau II) nu este în general adevărată. Dacă șirul $(a_n + b_n)$ este convergent nu rezultă că șirurile (a_n), (b_n) sînt convergente. Astfel șirurile

$$-1, +1, -1, +1, -1, +1, \ldots, a_n = (-1)^n$$

$$2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots, b_n = 1 + (-1)^{n+1}$$

sînt divergente, însă suma lor este șirul $c_n = 1$, convergent.

2) Teoremele I și II arată că mulțimea S a tuturor șirurilor convergente formează grup comutativ (abelian) față de operația de adunare.

3. Produsul şirurilor convergente

T e o r e m a III. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente, atunci şirul produs (a_nb_n) este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

sau limita produsului a două şiruri convergente există şi este egală cu produsul limitelor celor două şiruri.

Demonstraţie. Folosim datele de la prima teoremă şi observăm că putem scrie:

$$\alpha\beta - a_nb_n = \alpha(\beta - b_n) + b_n(\alpha - a_n)$$

$$|\alpha\beta - a_nb_n| \leqslant |\alpha|\cdot|\beta - b_n| + |b_n|\cdot|\alpha - a_n|, \qquad (1)$$

însă avem

$$b_n = b_n - \beta + \beta$$

sau

$$|b_n| \leqslant |b_n - \beta| + |\beta|.$$

Şirurile fiind convergente, (1) se scrie

$$|\alpha\beta - a_nb_n| \leqslant |\alpha|\cdot\varepsilon + \varepsilon(\varepsilon + |\beta|)$$

sau

$$|\alpha\beta - a_nb_n| \leqslant \varepsilon[|\alpha| + |\beta| + \varepsilon]$$

pentru $n > N(\varepsilon) = \max(N'(\varepsilon), N''(\varepsilon))$, de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\cdot\beta.$$

Rezultatul obţinut se menţine pentru un număr finit de şiruri convergente $(a_{n,i})$, $i = 1, 2, \ldots, p$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n,1}\cdot a_{n,2}\ldots a_{n,p}) = \lim_{n\to\infty} a_{n,1}\cdot\lim_{n\to\infty} a_{n,2}\ldots\lim_{n\to\infty} a_{n,p}.$$

C o n s e c i n ţ ă. Dacă $a_{n,i} = a_{n,j}$ pentru orice i, j, adică cele p şiruri sînt egale, atunci

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = (\lim_{n\to\infty} a_n)^p = \alpha^p.$$

O b s e r v a ţ i i

1) Teorema III rămîne adevărată dacă unul sau ambele şiruri au limita infinită.

Putem spune

a) dacă $a_n \to +\infty$ şi $b_n \to +\infty$, atunci $a_nb_n \to +\infty$;

b) dacă $a_n \to -\infty$ şi $b_n \to +\infty$, atunci $a_nb_n \to -\infty$;

c) dacă $a_n \to -\infty$ și $b_n \to -\infty$, atunci $a_n b_n \to +\infty$;

d) dacă $a_n \to \alpha > 0$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n b_n \to +\infty$;

e) dacă $a_n \to \alpha > 0$ și $b_n \to -\infty$, atunci $a_n b_n \to -\infty$;

f) dacă $a_n \to \alpha < 0$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n b_n \to -\infty$;

g) dacă $a_n \to \alpha < 0$ și $b_n \to -\infty$, atunci $a_n b_n \to +\infty$.

Aceste reguli justifică regulile de calcul impuse lui $+\infty$ și $-\infty$.

2) Reciproca teoremei III nu este în general adevărată. Șirurile

$$-1,\ +1,\ -1,\ +1, \ldots,\quad a_n = (-1)^n$$
$$+1,\ -1,\ +1,\ -1, \ldots,\quad b_n = (-1)^{n+1}$$

sînt divergente, iar produsul lor

$$-1,\ -1,\ -1, \ldots$$

este convergent.

3) Teoremele I, II, III arată că mulțimea S a șirurilor convergente formează un inel comutativ.

4) Dacă $a_n \to 0$ și $b \to +\infty$ (sau $-\infty$) nu putem afirma nimic despre șirul produs $a_n b_n$. Operația $0 \cdot \infty$ nu este definită. Spunem că nu are sens.

Exemple

1) Șirul $1, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{1}{n^3}, \ldots$ este convergent.

Șirul $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots$ este divergent.

Produsul lor $1, \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}, \frac{1}{3^{\frac{5}{2}}}, \ldots, \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}, \ldots$ este convergent.

2) Șirurile $a_n = \frac{1}{n!}$, $b_n = \frac{n+1}{n}$

sînt convergente. Produsul lor $a_n b_n$ este convergent.

4. Cîtul a două șiruri convergente

Teorema IV. Dacă (a_n) și (b_n) sînt două șiruri convergente și $b_n \neq 0$ pentru orice n, iar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$, atunci șirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este de asemenea convergent și

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

sau limita cîtului a două şiruri convergente există şi este egală cu cîtul limitelor celor două şiruri.

Demonstraţie. Avem

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha b_n - a_n \beta}{\beta b_n} = \frac{\alpha (b_n - \beta) - \beta (a_n - \alpha)}{\beta b_n}, \tag{1}$$

însă

$$b_n = (b_n - \beta) + \beta,$$

deci

$$|b_n| \geqslant |\beta| - |b_n - \beta| \tag{2}$$

şi cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar îl vom lua astfel încît $\frac{1}{2} |\beta| > \varepsilon$.

Dacă aplicăm inegalităţile modulului în (1) şi ţinem seama de (2), obţinem

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - \frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \frac{|\alpha| |b_n - \beta| + |\beta| |a_n - \alpha|}{|\beta| \cdot (|\beta| - \varepsilon)},$$

deci

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - \frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\beta|} \cdot \frac{|\alpha| + |\beta|}{\frac{1}{2} |\beta|}$$

pentru $n > N(\varepsilon) = \max (N'(\varepsilon), (N''(\varepsilon))$, de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$$

dacă $b_n \neq 0$ şi $\beta \neq 0$.

C o n s e c i n ţ ă. Dacă $a_n \neq 0$ şi $\alpha \neq 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^p = \left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right)^p = \frac{1}{\alpha^p},$$

O b s e r v a ţ i i

1) Teorema IV este adevărată şi în cazul limitei infinite în anumite cazuri :

a) dacă $a_n \to +\infty$ sau $a_n \to -\infty$, atunci $\frac{1}{a_n} \to 0$;

b) dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to +\infty$ sau $b_n \to -\infty$, atunci $\frac{a_n}{b_n} \to 0$;

c) dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to 0$, atunci $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$;

reguli care justifică regulile de calcul impuse lui $+\infty$ şi $-\infty$.

2) Dacă şirurile (a_n), (b_n) au amîndouă limite infinite, despre şirul cît $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu putem afirma nimic.

Operațiile $\frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}, \frac{\infty}{-\infty}$ nu sînt definite. Spunem că sînt lipsite de sens.

3) Reciproca teoremei IV nu este în general adevărată.

Exemple

1) Șirurile

$$2, \frac{3}{2}, 2, \frac{4}{3}, \ldots, 2, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

$$2, \frac{2}{3}, 2, \frac{3}{4}, \ldots, 2, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

sînt divergente. Șirul cît

$$1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

este convergent.

2) Șirurile

$$1, 2, \ldots, n, \ldots$$
$$1, 2^2, \ldots, n^2, \ldots$$

sînt divergente. Șirul cît

$$1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

este convergent.

3) Șirurile

$$(a_n),\ a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$(b_n),\ b_n = \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}}$$

sînt convergente. Șirul cît $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}$ este convergent și are limita 1.

Aplicație

Fie (a_n) un șir oarecare și (b_n) un șir crescător divergent. Să se arate că, dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

există (finită sau infinită), atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ există și are aceeași valoare (lema lui O. Stolz).

Demonstrație. 1) Să presupunem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l;\ \text{(finit)}$$

pentru $n \geqslant N(\varepsilon) = N$ vom avea

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < l + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Să dăm lui n succesiv valorile $N,\ N+1, \ldots, N+m-1=n$

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)(b_{N+1}-b_N)<a_{N+1}-a_N<\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)(b_{N+1}-b_N)$$

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)(b_{N+2}-b_{N+1})<a_{N+2}-a_{N+1}<\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)(b_{N+2}-b_{N+1})$$

. . . .

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)(b_n-b_{n-1}).$$

Dacă le adunăm, obţinem

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)(b_n-b_N)<a_n-a_N<\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)(b_n-b_N)$$

sau, împărţind cu b_n,

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)<\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_N}{b_n}<\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right).$$

Deoarece $b_n\to+\infty$, pentru $n>N_1$ putem avea simultan

$$\frac{b_N}{b_n}\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)<\frac{\varepsilon}{3},\ \frac{a_N}{b_n}<\frac{\varepsilon}{3},$$

de unde

$$l-\varepsilon<l-\frac{2\varepsilon}{3}<\frac{a_n}{b_n}<l+\varepsilon$$

sau

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon,\ n>N_1$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l.$$

2) Să presupunem că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty\cdot$$

Pentru orice $A>0$ există $N(A)=N$, astfel încît

$$a_{N+1}-a_N>A\ (b_{N+1}-b_N)$$
$$a_{N+2}-a_{N+1}>A\ (b_{N+2}-b_{N+1}).$$

. . . .

$$a_n-a_{n-1}>A\ (b_n-b_{n-1}),\qquad n=N+m-1.$$

Dacă adunăm pe coloane, obţinem

$$a_n-a_N>A\ (b_n-b_N)$$

și, împărțind cu b_n,

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a_N}{b_n} + A\left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right) > A\left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right).$$

De la un anumit rang N_2 vom avea $\frac{b_N}{b_n} < \frac{1}{2}$,

deci pentru $n > N_2$

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2} A,$$

care este echivalent cu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Cazul cînd $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to -\infty$ se tratează la fel.

Exemple

1) Dacă șirul $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ are limita s, atunci șirul

$$v_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

are aceeași limită. Folosind rezultatul precedent, unde

$$a_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n, \quad b_n = n,$$

obținem

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

2) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} = 0.$$

Punem

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad b_n = n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

5. Trecerea la limită în inegalități

Teoremă. Dacă toți termenii unui șir convergent (a_n) sînt pozitivi

$$a_n \geqslant 0, \ n \in N,$$

atunci și limita șirului (a_n) este pozitivă

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 0.$$

Demonstraţie. Fie $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Presupunem că $\alpha < 0$. Deoarece α este punct limită al şirului (a_n), urmează că există o vecinătate a punctului α care conţine numai elemente negative ale şirului dat, ceea ce este absurd, deoarece toate elementele şirului sînt nenegative, prin urmare $\alpha \geqslant 0$.

Consecinţă. Dacă (a_n) şi (b_n) sînt două şiruri convergente şi dacă pentru orice $n \in N$

$$a_n \geqslant b_n,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Exemplu

1) Să arătăm că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Avem, evident, $\sqrt[n]{n} > 1$ pentru $n > 1$. Să punem $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$; obţinem

$$n = (\alpha_n + 1)^n = 1 + \frac{n}{1!}\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \dots$$

sau

$$n > \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2,$$

de unde rezultă

$$\alpha_n^2 < \frac{2\,n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1},$$

deci $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6. Puteri reale

Fie $a > 0$ şi α un număr iraţional. Ne propunem să definim a^α. Dacă (l_n) şi (e_n) sînt două şiruri raţionale, aproximante prin lipsă sau exces al numărului iraţional α (A., cap. I, § 2, al. 2), şiruri care au proprietăţile

1) $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \dots \leqslant l_n \leqslant \dots$

2) $e_1 \geqslant e_2 \geqslant e_3 \geqslant \dots \geqslant e_n \geqslant \dots$

3) $e_n - l_n = \frac{1}{10^n},\ e_p > l_q,\ p,\ q \in N$

să arătăm că şirurile

$$a^{l_1},\ a^{l_2},\ \dots,\ a^{l_n},\ \dots \tag{1}$$

$$a^{e_1},\ a^{e_2},\ \dots,\ a^{e_n},\ \dots \tag{2}$$

sînt convergente și au aceeași limită. Într-adevăr, $a > 1$, șirul (a^{l_n}) este monoton crescător, iar șirul (a^{e_n}) este monoton descrescător. Avem și

$$a^{l_n} < a^{e_1}; \quad a^{e_n} > a^{l_1}.$$

Prin urmare, șirurile considerate (1), (2) sînt respectiv mărginite superior și inferior, deci sînt convergente. Diferența

$$a^{e_n} - a^{l_n} = a^{l_n}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right) < a^{e_1}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right)$$

tinde către zero cînd $n \to \infty$, deci șirurile (a^{l_n}) și (a^{e_n}) au aceeași limită, care este prin definiție *puterea* a^α

$$a^\alpha = a^{\lim\limits_{n\to\infty} e_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} l_n}.$$

Rezultatul este același pentru orice șir (r_n) convergent către α; deci, dacă

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n} = a^\alpha.$$

Observații

1) Dacă $0 < a < 1$, șirul (a^{l_n}) va fi descrescător, iar șirul (a^{e_n}) va fi crescător.

2) Dacă $a = 0$, $0^\alpha = 0$, $\alpha > 0$.

7. Proprietățile puterilor reale

Puterile reale au aceleași proprietăți ca și puterile raționale:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

2) $(a^x)^y = a^{xy}$;

3) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x} = a^x \cdot b^{-x}$;

4) dacă $a > 1$ și $x > 0$, atunci $a^x > 1$;

5) dacă $0 < a < 1$, $x > 0$, atunci $0 < a^x < 1$;

6) dacă $x < y$, $a > 1$, atunci $a^x < a^y$;

dacă $x < y$, $0 < a < 1$, atunci $a^x > a^y$;

7) dacă $0 < a < b \begin{cases} \text{pentru } x > 0, \ a^x < b^x; \\ \text{pentru } x < 0, \ a^x > b^x; \end{cases}$

8) dacă $x_n \to x$, atunci $a^{x_n} \to a^x$;

9) dacă $a > 0$, $a \neq 1$ şi $a^{x_n} \to a^x$, atunci $x_n \to x$.

(Dacă exponentul este $\leqslant 0$, se va considera baza strict pozitivă.)

8. Logaritmi

Să arătăm că ecuaţia $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \geqslant 0$ are o singură soluţie.

1) Vom presupune mai întîi $a > 1$, $b \geqslant 1$. Există un număr întreg $n \geqslant 0$ astfel încît

$$a^n \leqslant b < a^{n+1}.$$

Dacă $m_1 = n + \frac{1}{2}$, avem

$$a^n < a^{m_1} < a^{n+1}.$$

Dacă notăm cu $[x_1, y_1]$ intervalul $[n, m_1]$ sau $[m_1, n + 1]$ pentru care

$$a^{x_1} \leqslant b < a^{y_1},$$

obţinem

$$y_1 - x_1 = \frac{1}{2}.$$

Împărţim segmentul $[x_1, y_1]$ cu punctul m_2 în două părţi egale

$$m_2 = x_1 + \frac{1}{2^2}, \quad m_2 = y_1 - \frac{1}{2^2}.$$

Avem

$$a^{x_1} < a^{m_2} < a^{y_1}$$

şi dacă notăm cu $[x_2, y_2]$ intervalul $[x_1, m_2)]$ sau $[m_2, y_1]$ pentru care

$$a^{x_2} \leqslant b < a^{y_2}$$

obţinem

$$y_2 - x_2 = \frac{1}{2^2}.$$

Să presupunem că am găsit două numere $x_n < y_n$ astfel încît

$$a^{x_n} \leqslant b < a^{y_n} \text{ şi } y_n - x_n = \frac{1}{2^n}$$

și să împărțim segmentul $[x_n, y_n]$ în două părți egale prin punctul c_n; obținem

$$a^{x_n} < a^{c_n} < a^{y_n}.$$

Numărul b este cuprins într-unul din intervalele a^{x_n}, a^{c_n} sau a^{c_n}, a^{y_n}; să notăm cu x_{n+1}, y_{n+1} exponenții celor două puteri consecutive pentru care

$$a^{x_{n+1}} \leqslant b < a^{y_{n+1}}.$$

Obținem de asemenea

$$x_n \leqslant x_{n+1} < y_{n+1} \leqslant y_n, \; y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

În modul acesta construim două șiruri (x_n), (y_n) care au proprietățile

a) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots;$

b) $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n \geqslant \ldots;$

c) $y_n - x_n = \frac{1}{2^n}, \; y_p > x_q, \qquad n, p, q \in N;$

d) $a^{x_n} \leqslant b < a^{y_n};$

deci șirurile (x_n), (y_n) au o limită comună x_0; prin urmare, și șirurile (a^{x_n}), (a^{y_n}) au o limită comună, anume

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^{x_0},$$

și din d rezultă că $a^{x_0} = b$, x_0 fiind soluția căutată. Dacă $b > 1$, $x_0 > 0$; dacă $b = 1$, $x_0 = 0$, deoarece $a^0 = 1$.

2) Dacă $0 < b < 1, \frac{1}{b} > 1$ și ecuația

$$a^x = \frac{1}{b}, \qquad a > 1,$$

are o soluție y_0, însă $a^{-y_0} = b$, deci $-y_0$ este soluția ecuației $a^x = b, 0 < b < 1$

3) Dacă $0 < a < 1$, $\frac{1}{a} > 1$ și ecuația

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = b, \qquad b \geqslant 0,$$

are o soluție z_0

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{z_0} = b, \text{ deci } a^{-z_0} = b$$

și $-z_0$ este soluția ecuației $a^x = b$, $0 < a < 1$, $b \geqslant 0$.

Soluția găsită este unică; în adevăr, două soluții $x_0 \neq y_0$, $a^{x_0} = b$, $a^{y_0} = b$ conduc la $a^{x_0} = a^{y_0}$, $a \neq 1$, ceea ce este absurd.

Definiţie. Numărul real unic care verifică ecuaţia

$$a^x = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b \geqslant 0$$

se numeşte logaritmul în baza a al lui b şi se notează $\log_a b$;

$$x = \log_a b.$$

Ţinînd seama de proprietăţile puterilor reale, deducem cu uşurinţă următoarele proprietăţi ale logaritmilor:

1) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$;

2) $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_a a^c = c$;

3) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

4) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

5) $\log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x$;

6) $\lim_{n \to \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \log_a x_n = \log_a x$, dacă $x_n > 0$, $x > 0$;

7) dacă $a > 1$, $\log_a x > 0$, pentru $x > 1$;
$\log_a x < 0$, pentru $0 < x < 1$;

8) dacă $0 < a < 1$, $\begin{cases} \log_a x < 0, & \text{pentru } x > 1; \\ \log_a x > 0, & \text{pentru } 0 < x < 1; \end{cases}$

9) dacă $a > 1$ şi $x < y$, atunci $\log_a x < \log_a y$;

dacă $0 < a < 1$ şi $x < y$, atunci $\log_a x > \log_a y$.

Schimbarea bazei

$$\text{Din } N = a^x,\ N = b^y$$

avem

$$x = \log_a N,\ y = \log_b N$$

$$x \cdot \log_b a = y, \quad y \cdot \log_a b = x, \tag{1}$$

iar formula care permite să calculăm $\log_b N$ cu ajutorul logaritmilor în baza a este dată de

$$\log_b N = \log_b a \cdot \log_a N.$$

Numărul

$$M = \log_b a$$

se numeşte *modulul de transformare*; avem din (1)

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1.$$

Logaritmii în baza e se numesc *logaritmi naturali* sau *logaritmi neperieni* şi se notează $\ln x$, în loc de $\log_e x$.

Logaritmii în baza 10 se numesc *logaritmi zecimali* şi se notează $\lg x$, în loc de $\log_{10} x$.

Modulul de transformare care ne permite să trecem de la logaritmi în baza 10 la logaritmii în baza e este numărul

$$\ln 10 = 2{,}30258\ldots$$

Exemplu

$\ln 2 = 2{,}30258 \cdot \lg 2 = 2{,}30258 \times 0{,}30103 = 0{,}69315$ cu cinci zecimale exacte.

O consecință importantă a proprietăților logaritmilor este

Teorema V. Dacă $a_n \to \alpha$ $(a_n > 0,\ \alpha > 0)$ și $b_n \to \beta$, atunci $a_n^{b_n}$ este convergent către α^β

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Demonstrație. Putem scrie $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{b_n \ln a_n} =$
$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ln a_n} = e^{\beta \ln \alpha} = \alpha^\beta.$

Teorema stabilită completează cele patru teoreme stabilite la B., cap. I, § 6.

Teorema V rămîne adevărată și în cazurile limitelor infinite, anume:

1) dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to +\infty$;

2) dacă $a_n \to a > 1$, $b_n \to +\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to +\infty$;

3) dacă $a_n \to a$, $0 \leqslant a < 1$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to 0$;

4) dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to 0$;

5) dacă $a_n \to a > 1$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to 0$;

6) dacă $a_n \to a$, $0 < a < 1$, $b_n \to -\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to +\infty$;

7) dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to \beta > 0$, atunci $a_n^{b_n} \to +\infty$;

8) dacă $a_n \to +\infty$, $b_n \to \beta < 0$, atunci $a_n^{b_n} \to 0$.

Operațiile 1^∞, $1^{-\infty}$, ∞^0, 0^0 nu sînt definite; spunem că sînt operații lipsite de sens.

Exemple

1) Șirul $\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^{\frac{3n+2}{n+1}}$ are limita 2^3.

2) Șirul $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$, $a > 0$, are limita 1.

§ 7. SERII DE NUMERE

1. Definiţii

Fie şirul de numere reale

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

Cu ajutorul lor să formăm şirul

$$s_1 = u_1$$
$$s_2 = u_1 + u_2$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dacă şirul (s_n) este convergent şi are limita s, atunci putem scrie

$$s = \lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n).$$

Se obişnuieşte a se scrie această egalitate astfel

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

Membrul doi al relaţiei (1) se numeşte *serie* şi operaţia de adunare repetată de o infinitate de ori capătă astfel un sens.

Rezultatul acestei operaţii este un număr s numit *suma seriei.*

O serie se notează astfel

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{sau numai } \sum u_n.$$

Numerele $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ se numesc *termenii seriei*, iar $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ şirul *sumelor parţiale* ale seriei Σu_n.

Definiţie. Spunem că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

este convergentă, divergentă sau oscilantă, după cum şirul sumelor parţiale (s_n) **este convergent, are limita infinită** (divergent) **sau nu are limită** (are mai multe puncte limită).

Să observăm de la început că, dacă suprimăm un număr finit de termeni dintr-o serie, seria rămasă are aceeaşi „natură'' cu seria iniţială. Fie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{s_1}$$

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_n + \ldots \tag{s_2}$$

două serii, ultima obținîndu-se din prima prin suprimarea primilor k termeni:

$$\mu = u_1 + u_2 + \ldots + u_k.$$

Sumele parțiale ale celor două serii vor fi

$$s_n \quad \text{și} \quad s_n - \mu$$

și, cum μ este fix, urmează că, dacă seria (s_1) este convergentă, divergentă sau oscilantă, și seria (s_2) va fi, respectiv, convergentă, divergentă sau oscilantă, și reciproc.

Exemple

1) Am arătat (B., cap. I. §4 al. 5) că șirul

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n \in N,$$

este divergent. Șirul (s_n) este șirul sumelor parțiale ale seriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{2}$$

deci seria (2), numită și *serie armonică*, este divergentă.

Cu aceeași ocazie s-a arătat că șirul

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \quad n \in N,$$

este convergent. Prin urmare, seria

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots,$$

numită și *serie armonică alternată*, este convergentă.

2) Să considerăm șirul sumelor parțiale ale seriei

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots,$$

numită serie geometrică

$$s_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a} + \frac{a^{n+1}}{a - 1}.$$

Dacă $0 < a < 1$, $\frac{a^{n+1}}{a-1} \to 0$, deci $s_n \to \frac{1}{1-a}$ și seria este convergentă; dacă $a > 1$, $\frac{a^{n+1}}{a-1} \to +\infty$ și seria este divergentă; pentru $a = 1$, $s_n = n \to \infty$, deci seria este divergentă.

2. Condiția necesară și suficientă de convergență a unei serii

Criteriul general al lui Cauchy. Pentru ca seria

$$u_1 + u_2 \ldots + u_n + \ldots$$

să fie convergentă este necesar și suficient ca la orice număr $\varepsilon > 0$ să existe un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și orice $p \geqslant 1$ să avem

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} | < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Aplicînd şirului sumelor parţiale $s_n = u_1 + \ldots + u_n$ criteriul general al lui Cauchy stabilit la şiruri

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \quad \text{pentru } n > N(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad p \geqslant 1,$$

găsim

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p},$$

din care rezultă imediat enunţul de mai sus.

Pentru $p = 1$,

$$|u_{n+1}| < \varepsilon, \text{ pentru } n > N(\varepsilon),$$

dacă seria este convergentă; avem deci următoarea

Teoremă. O condiţie necesară ca seria

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

să fie convergentă este ca şirul format cu termenii seriei să fie convergent către zero.

Exemple

1) Seria $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ este divergentă, deşi şirul termenilor săi $\left(\frac{1}{n}\right)$ este convergent către zero.

2) Seria $1 - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$ este convergentă şi şirul termenilor $\left((-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right)$ este convergent către zero.

Din teorema precedentă rezultă următoarea

Consecinţă. Dacă şirul format cu termenii unei serii nu este convergent către zero, seria nu este convergentă.

Exemplu Seria

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n} + \cdots$$

este divergentă, deoarece $u_n \to 1$ cînd $n \to \infty$.

Definiţie. Se numeşte restul seriei (u_n) şi se notează cu R_n suma seriei următoare (dacă există)

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} + \cdots$$

Din criteriul general al lui Cauchy deducem următoarea

Teoremă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca seria

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

să fie convergentă este ca pentru orice număr $\varepsilon > 0$ să existe un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|R_n| < \varepsilon$$

pentru orice $n > N(\varepsilon)$.

Observații

În practică, criteriul general al lui Cauchy este greu de aplicat, din care cauză se folosesc criterii care stabilesc condiții *suficiente* de convergență și care au avantajul că sînt mai ușor de folosit. Același defect îl prezintă și ultima teoremă, deoarece aplicarea ei necesită găsirea unei majorante a seriei care reprezintă pe R_n, din care trebuie să se deducă și faptul că $R_n \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Studiul seriilor conduce la două probleme:

– stabilirea convergenței;

– calculul sumei;

ultima problemă fiind subordonată primei. Vom începe cu stabilirea de criterii suficiente de convergență.

3. Serii cu termeni pozitivi

Definiție. **O serie**

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

se numește serie cu termeni pozitivi dacă, începînd de la un rang N, toți termenii u_n, $n > N$, sînt strict pozitivi.

Prin urmare, o serie cu termenii pozitivi are toți termenii strict pozitivi cu excepția unui număr finit. Știm că înlăturarea unui număr finit de termeni dintr-o serie nu schimbă natura seriei, ci numai suma ei; de aceea, vom considera în cele ce urmează serii în care *toți termenii* sînt strict pozitivi, deoarece concluziile privind convergența sau divergența lor sînt valabile și pentru seriile în care un număr finit de termeni sînt negativi.

Sumele parțiale ale unei serii cu termeni pozitivi formează un șir monoton crescător. Folosind rezultatele de la șirurile monotone, avem

a) **Criteriul monotoniei.** **Dacă șirul sumelor parțiale**

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

ale unei serii cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este mărginit, seria este convergentă, iar dacă este nemărginit, seria este divergentă.

Exemple

1) Seria lui Riemann

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

pentru $\alpha > 1$ este convergentă.

Putem scrie

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots=\frac{1}{1^\alpha}+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{m\alpha}}+\frac{1}{(2^m+1)^\alpha}+\frac{1}{(2^m+2)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}\right)+\ldots$$

şi, dacă considerăm sumele parţiale S_p, $p=2^{m+1}-1$, avem

$$S_p=\frac{1}{1^\alpha}+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{m\alpha}}+\frac{1}{(2^m+1)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}\right)$$

$$S_p<1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\ldots+\frac{2^m}{2^{m\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{2^{2\alpha-2}}+\ldots+\frac{1}{2^{m(\alpha-1)}}\Big)$$

$$S_p<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}=\frac{1}{1-2^{1-\alpha}},\ \text{dacă }\alpha>1.$$

Şirul sumelor parţiale fiind mărginit, seria este convergentă.

Pentru $\alpha = 1$, *seria lui Riemann* este *seria armonică*, care ştim că este *divergentă*.

b) Primul criteriu al comparaţiei. Fie Σu_n şi Σv_n două serii cu termeni pozitivi. Dacă există un număr N astfel încît pentru orice $n > N$

$$u_n \leqslant v_n, \tag{1}$$

atunci :

— **dacă seria Σv_n este convergentă, şi seria Σu_n este convergentă;**
— **dacă seria Σu_n este divergentă, şi seria Σv_n este divergentă.**

Demonstraţie. Putem presupune că neegalităţile (1) sînt adevărate pentru $n \geqslant 1$. Seria Σv_n este convergentă, deci şirul sumelor parţiale

$$V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n < M$$

este mărginit. Deoarece $u_1 \leqslant v_1$, $u_2 \leqslant v_2$, ..., urmează că şirul sumelor parţiale U_n ale seriei Σu_n este majorat de V_n,

$$U_n \leqslant V_n < M,$$

deci şi seria Σu_n este convergentă.

Să presupunem acum că seria Σu_n este divergentă. Şirul sumelor parţiale (U_n) este crescător, nemărginit. Deoarece $v_1 \geqslant u_1,\ v_2 \geqslant u_2 \ldots$, urmează că astfel şirul sumelor parţiale ale seriei Σv_n este minorat de U_n,

$$V_n \geqslant U_n;$$

seria Σu_n fiind divergentă, pentru orice număr A există un număr $N(A)$ astfel încît pentru $n > N(A)$, $U_n > A$, deci şi $V_n > A$ şi seria Σv_n este divergentă.

Exemple

1) Seria lui Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cu $\alpha < 1$ este divergentă. Într-adevăr, avem $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$, $\alpha < 1$, deci seria $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă pentru $\alpha < 1$.

În concluzie, seria lui Riemann

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$.

2) Seria $\sum_1^\infty \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ este convergentă.

Avem $\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; seria lui Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă, deci seria dată este convergentă.

c) **Al doilea criteriu al comparaţiei. Fie $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ două serii cu termenii pozitivi. Dacă, începînd de la un rang $n > N$, avem neegalităţile**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}\ (n = N+1, \ldots),$$

atunci:

— dacă seria $\sum_1^\infty v_n$ este convergentă, şi seria $\sum_1^\infty u_n$ este convergentă;

— dacă seria $\sum_1^\infty u_n$ este divergentă, şi seria $\sum_1^\infty v_n$ este divergentă.

Demonstraţie. Putem presupune şi aici că $N = 0$; din enunţ deducem

$$\frac{u_1}{v_1} \geqslant \frac{u_2}{v_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{u_n}{v_n} \geqslant \ldots$$

Dacă punem $\frac{u_1}{v_1} = k \neq 0$, obţinem

$$u_1 = kv_1,\ u_2 \leqslant kv_2,\ \ldots,\ u_n \leqslant kv_n,\ \ldots$$

Între sumele parțiale U_n și V_n avem, prin urmare, neegalitățile

$$U_n \leqslant k\ V_n,$$

din care rezultă punctele 1 și 2 din enunț, folosind primul criteriu al comparației.

Exemplu

Seria cu termenul general $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este divergentă.
Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ nu există, însă putem scrie

$$u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Seria cu termenul general $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ este divergentă $\left(\text{seria lui Riemann cu } \alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$, deci seria dată este divergentă.

d) Criteriul rădăcinii sau al lui Cauchy. **Fie o serie cu termeni pozitivi $\sum\limits_1^\infty u_n$; dacă există un număr N astfel încît pentru orice $n > N$ să avem**

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1,$$

seria este convergentă, iar dacă

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant q > 1,$$

seria este divergentă.

Demonstrație. Din enunț rezultă că pentru orice $n > N$, $u_n \leqslant q^n$, și cum $q < 1$ urmează că termenul general al seriei este mai mic decît termenul general al unei serii convergente (seria geometrică cu rația mai mică decît 1) și, conform primei teoreme a comparației, seria $\sum\limits_1^\infty u_n$ este convergentă. În cazul al doilea, $u_n \geqslant q^n$ și $q > 1$, deci seria $\sum\limits_1^\infty u_n$ este divergentă.

Pentru a aplica criteriul lui Cauchy unei serii date, calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$ (dacă există) și dacă $\lambda < 1$, seria este convergentă, iar dacă $\lambda > 1$, seria este divergentă. Într-adevăr, dacă $\lambda < 1$, putem găsi un număr $\varepsilon > 0$ astfel încît $\lambda + \varepsilon < 1$; λ fiind punct limită, rezultă că există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem

$$\lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \lambda + \varepsilon = q < 1,$$

adică $u_n < q^n$ cu $q < 1$, și seria este convergentă. În cazul al doilea, $\lambda > 1$,

deci pentru $\varepsilon > 0$ şi $\lambda - \varepsilon > 1$ există un număr $N'(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N'(\varepsilon)$ avem

$$\sqrt[n]{u_n} > \lambda - \varepsilon = q' > 1$$

sau

$$u_n > q'^n,\ q' > 1$$

şi seria este divergentă.

În cazul cînd $\lambda = 1$, criteriul lui Cauchy nu se aplică.

Exemplu

Fie seria cu termenul general $u_n = \dfrac{(n^n + 1)^\alpha}{(n^n + 2)^\beta}$.

Aplicăm criteriul lui Cauchy; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n^n + 1)^\alpha}{(n^n + 2)^\beta}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-\beta} \frac{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{\alpha}{n}}}{\left(1+\frac{2}{n^n}\right)^{\frac{\beta}{n}}} = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } \alpha > \beta \\ 1, \text{ dacă } \alpha = \beta \\ 0, \text{ dacă } \alpha < \beta \end{cases}$$

deci pentru $\alpha < \beta$, seria este convergentă, iar pentru $\alpha > \beta$, seria este divergentă.

Pentru $\alpha = \beta$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, seria este divergentă, deoarece şirul termenilor seriei nu este convergent către zero.

e) **Criteriul raportului sau al lui D'Alembert.** Fie seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_1^\infty u_n$; dacă există un număr N astfel încît pentru orice $n > N$ avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1,$$

seria este convergentă, iar dacă

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q > 1,$$

seria este divergentă.

Demonstraţie. Presupunem neegalităţile adevărate pentru $n \geqslant 1$; rezultă în primul caz

$$\begin{aligned} &u_2 \leqslant q\ u_1 \\ &u_3 \leqslant q\ u_2 \leqslant q^2\ u_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &u_{n+1} \leqslant q\ u_n \leqslant q^n\ u_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Deci $u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leqslant u_1 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$ şi, cum $q < 1$, după prima teoremă a comparaţiei, urmează că seria $\sum u_n$ este convergentă.

În cazul al doilea avem şirul de neegalităţi

$$u_2 \geqslant q\ u_1$$
$$u_3 \geqslant q\ u_2 \geqslant q^2 \cdot u_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{n+1} \geqslant q\ u_n \geqslant q^n \cdot u_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Prin urmare, $u_1 + u_2 + \ldots + u_n \geqslant u_1\ (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$; însă $q > 1$, deci seria minorantă a lui $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este o serie divergentă, deci şi seria $\sum u_n$ este divergentă.

În practică se calculează $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ (dacă există); dacă $\lambda > 1$, seria este divergentă; dacă $\lambda < 1$, seria este convergentă; dacă $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică. Se demonstrează la fel ca la criteriul rădăcinii.

Exemple

1) Fie seria cu termenul general

$$u_n = \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}.$$

Criteriul raportului dă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n+1} = 0,$$

deci seria este convergentă.

2) Fie acum seria cu termenul general

$$u_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots 3n} \cdot \frac{1}{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)\ (n+3)}{3\,(n+1)\ (n+4)} = 1$$

Criteriul raportului nu dă nici un rezultat.

Observaţie

Criteriile de convergenţă nu sînt la fel de eficiente. De exemplu, criteriul raportului este mai slab decît criteriul rădăcinii, adică acolo unde criteriul raportului nu se aplică s-ar putea să se aplice criteriul rădăcinii. Pentru seria

$$a + \frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^3}{b^2} + \frac{a^3}{b^3} + \ldots + \frac{a^n}{b^n} + \frac{a^{n+1}}{b^n} + \ldots$$

criteriul raportului conduce, pentru ca seria să fie convergentă, la $a < 1$ şi $b > 1$, iar criteriul rădăcinii, numai la $\frac{a}{b} < 1$ şi se vede cu uşurinţă că condiţiile $a < 1$ şi $b > 1$ sînt mai restrictive decît $\frac{a}{b} < 1$.

f) **Criteriul logaritmic. Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_{1}^{\infty} u_n$; dacă, începînd de la un rang N, avem neegalitățile**

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > 1, \text{ pentru orice } n > N,$$

seria este convergentă, iar dacă

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} < 1, \text{ pentru orice } n > N,$$

seria este divergentă.

Demonstrație. a) Să presupunem că neegalitățile din enunț au loc pentru $n \geqslant 1$; avem

$$\ln \frac{1}{u_n} \geqslant k \ln n, \quad k > 1,$$

sau

$$u_n \leqslant \frac{1}{n^k}$$

Însă seria $\sum \frac{1}{n^k}$, cu $k > 1$, este convergentă, deci, conform criteriul comparației, și seria $\sum u_n$ este convergentă.

b) Dacă $\ln \frac{1}{u_n} \leqslant k \ln n$, $n \geqslant 1$, $k < 1$, avem și

$$u_n \geqslant \frac{1}{n^k},$$

însă pentru $k < 1$ seria $\sum \frac{1}{n^k}$ este divergentă, deci și seria $\sum u_n$ este divergentă.
În practică se calculează

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lambda \text{ (dacă există).}$$

Dacă $\lambda > 1$, seria este convergentă; dacă $\lambda < 1$, seria este divergentă; pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Exemplu

Seria cu termenul general

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}\,(n+2)}{\sqrt[3]{n^2+2}\,(n^3+1)}$$

este convergentă. Criteriul logaritmic dă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln (n^2+2)^{\frac{1}{3}} + \ln (n^2+1) - \ln (n+1)^{\frac{1}{2}} - \ln (n+2)}{\ln n} = \frac{7}{6} > 1.$$

g) **C r i t e r i u l l u i K u m m e r.** **Fie seria cu termeni pozitivi**

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Dacă există un şir de numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ şi un număr N astfel încît

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \lambda > 0, \text{ pentru orice } n > N, \text{ seria } \sum_1^\infty u_n \text{ este convergentă.} \quad (1)$$

Dacă $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < \lambda < 0$, **pentru orice** $n > N$, (2)

iar seria $\sum_1^\infty \frac{1}{a_n}$ **este divergentă, şi seria** $\sum_1^\infty u_n$ **este divergentă.**

Demonstraţie. Deoarece $u_n > 0$, neegalitatea (1) se mai poate scrie

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > \lambda u_{n+1} > 0, \quad (3)$$

deci şirul $a_n u_n$ este monoton descrescător şi mărginit inferior, deoarece $a_n u_n > 0$; prin urmare, seria cu termenul general $v_n = a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}$ este convergentă şi are ca sumă

$$v = a_1 u_1 - l,$$

unde $l = \lim_{n\to\infty} a_n u_n$. Din (3) avem

$$u_{n+1} < \frac{1}{\lambda} (a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}),$$

deoarece $\lambda > 0$ şi, aplicînd criteriul întîi al comparaţiei, urmează că seria $\sum_1^\infty u_n$ este convergentă.

În cazul al doilea, pornind de la (2), avem

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} < \lambda u_{n+1} < 0.$$

Şirul $a_n u_n$ este, prin urmare, monoton crescător, deci există un număr $A > 0$ şi un număr $N(A)$ astfel încît pentru orice $n > N(A)$ să avem $a_n u_n > A$. Dacă împărţim cu $a_n > 0$, putem scrie

$$u_n > \frac{A}{a_n}$$

şi, cum seria $\sum_1^\infty \frac{1}{a_n}$ este divergentă, conform primului criteriu al comparaţiei, urmează că seria $\sum_1^\infty u_n$ este divergentă.

Cazuri particulare. Luînd pentru șirul a_n șiruri particulare, astfel încît seria $\sum_1^\infty \frac{1}{a_n}$ să fie divergentă, obținem criterii cunoscute sau altele noi. Astfel, dacă $a_n = 1$, atunci obținem criteriul raportului al lui d'Alembert. Dacă $a_n = n$, obținem

h) **Criteriul lui Raabe și Duhamel. Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_1^\infty u_n$; dacă există un număr N astfel încît pentru orice $n > N$**

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant \lambda > 1,$$

seria este convergentă; dacă

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leqslant \lambda < 1,$$

seria este divergentă.

În practică se calculează $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = k$ (dacă există). Dacă $k > 1$, seria este convergentă; dacă $k < 1$, seria este divergentă.

Criteriul lui Raabe și Duhamel se aplică în general în cazul în care criteriul lui d'Alembert nu duce la nici un rezultat.

Exemple

1) Fie seria cu termenul general

$$u_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9 \ldots (3n)} \cdot \frac{1}{n+3}$$

pentru care, după cum am văzut, criteriul lui d'Alembert nu dă nici un rezultat. Avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{3(n+1)(n+4) - (3n+1)(n+3)}{(3n+1)(n+3)} = \frac{5}{3} > 1,$$

deci seria este convergentă.

2) Seria

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln n} + \ldots$$

este divergentă. Avem

$$\frac{1}{2\ln 2} + \left(\frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4}\right) + \left(\frac{1}{5\ln 5} + \ldots + \frac{1}{8\ln 8}\right) + \ldots$$

$$+ \ldots > \frac{1}{2\ln 2} + \frac{2}{4\ln 4} + \frac{4}{8\ln 8} + \ldots + \frac{2^{m-1}}{2^m \ln 2^m} + \ldots$$

$$+ \ldots = \frac{1}{4\ln 2}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} + \ldots\right),$$

deci sumele parţiale S_m, $m = 2^m$ sînt minorate de sumele parţiale ale seriei armonice $\left(\text{înmulţite cu } \frac{1}{4 \ln 2}\right)$, care este divergentă, deci seria dată este divergentă.

Şirul $a_n = n \ln n$, înlocuit în criteriul lui Kummer, ne conduce la un nou criteriu de convergenţă, datorit lui J. Bertrand.

4. Serii cu termeni oarecare

O serie cu termeni oarecare are o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi. Seriile care au toţi termenii negativi şi numai un număr finit de termeni pozitivi sînt considerate tot serii cu termeni pozitivi, deoarece înmulţind toţi termenii cu -1 se obţine o serie cu termeni pozitivi.

Definiţie. O serie cu termenii oarecare

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

se numeşte absolut convergentă dacă seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

este convergentă. Dacă seria(1) este convergentă, însă seria modulelor este divergentă, seria se numeşte simplu convergentă sau semiconvergentă.

Teoremă. Dacă o serie cu termeni oarecare este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Demonstraţie. Seria modulelor fiind convergentă, conform criteriului general al lui Cauchy, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi $p \geqslant 1$ avem

$$\sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}| < \varepsilon.$$

Dar

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right| < \sum_{k=1}^{p} |u_{n+k}| < \varepsilon,\ n > N(\varepsilon),$$

deci cu atît mai mult pentru $n > N(\varepsilon)$ avem

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right| < \varepsilon$$

şi seria este convergentă. Teorema este demonstrată.

Condiţia aceasta este însă numai suficientă, nu şi necesară, deoarece există serii convergente fără ca seria modulelor să fie convergentă.

Exemplu

Seria lui Riemann alternată

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha}}$$

pentru $\alpha > 1$ este absolut convergentă, iar pentru $\alpha \leqslant 1$ este numai simplu convergentă. În particular, seria armonică alternată este simplu convergentă.

Seriile cu termeni pozitivi sînt absolut convergente. Criteriile de convergenţă stabilite la seriile cu termeni pozitivi sînt valabile şi pentru seriile absolut convergente.

Un criteriu de convergenţă simplă este

Criteriul lui Abel. Fie seria cu termeni oarecare

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

astfel încît şirul sumelor parţiale $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$

$$\sigma_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

este mărginit. Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ **este un şir de numere pozitive monoton descrescător, avînd ca limită zero, atunci seria**

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

este convergentă.

Demonstraţie. Dacă notăm cu s_n sumele parţiale ale seriei $\sum_{1}^{\infty} a_n u_n$, observăm că

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} u_{n+1} + a_{n+2} u_{n+2} + \ldots + a_{n+p} u_{n+p} =$$
$$= a_{n+1} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) + a_{n+2} (\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1}) + \ldots + a_{n+p} (\sigma_{n+p} - \sigma_{n+p-1}),$$

deoarece

$$u_{n+k} = \sigma_{n+k} - \sigma_{n+k-1}.$$

Putem deci scrie

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+p} \sigma_{n+p} - a_{n+1} \sigma_p + \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1}) \sigma_{n+k}.$$

Sumele σ_n sînt mărginite, deci $|\sigma_n| < M$ pentru orice $n \in N$. Şirul a_n fiind monoton descrescător $a_{n+k} - a_{n+k+1} > 0$; prin urmare,

$$|s_{n+p} - s_n| \leqslant M (a_{n+p} + a_{n+1}) + M (a_{n+1} - a_{n+p}) =$$
$$= M (a_{n+p} + a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+p}) = 2a_{n+1} M$$

şi, cum $a_n \to 0$, urmează că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem

$$a_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M},$$

de unde $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, $n > N(\varepsilon)$ şi, conform criteriului general al lui Cauchy, seria

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n + \ldots$$

este convergentă.

Exemplu

Dacă luăm

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha > 0 \text{ şi } u_n = \sin n\ x,\ n \in N,$$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Prin urmare, sumele parţiale s_n sînt mărginite dacă $x \neq 2k\pi$; sîntem în condiţiile criteriului lui Abel, deci seria cu termenul general

$$v_n = \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

este convergentă, oricare ar fi $\alpha > 0$.

O serie simplu convergentă are o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi. Să arătăm că atît seria formată cu termenii pozitivi cît şi seria formată cu termenii negativi sînt divergente. Seria $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ fiind simplu convergentă, rezultă că seria modulelor

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

este divergentă. Fie α_n suma termenilor pozitivi şi $-\beta_n$ suma termenilor negativi cuprinşi în primii n termeni ai seriei date;
avem

$$s_n = \alpha_n - \beta_n$$

şi

$$\sigma_n = \alpha_n + \beta_n,$$

unde σ_n este suma primilor n termeni ai seriei modulelor; avem

$$\beta_n = \frac{1}{2}(\sigma_n - s_n)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(\sigma_n + s_n)$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty.$$

5. Serii alternate

Se numeşte serie alternată o serie de forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots,$$

unde toţi u_k sînt numere pozitive.

C r i t e r i u l l u i L e i b n i z. Dacă într-o serie alternată şirul u_n este monoton, descrescător şi are limita zero, seria este convergentă.

Demonstraţie. Fie şirurile $(a_n) = ((-1)^{n+1})$ şi (u_n), ultimul fiind monoton descrescător, avînd ca limită zero. Sumele parţiale

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \begin{cases} 1, & n = 2m+1 \\ 0, & n = 2m \end{cases}$$

sînt mărginite. Conform criteriului lui Abel, seria $u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$ este convergentă.

E x e m p l e

1) Seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

este convergentă, deoarece şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$ este convergent către zero.

2) Seria alternată

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

este convergentă, deoarece şirul $\frac{1}{\sqrt{n}}$ este convergent către zero.

În general, seria lui Riemann alternată

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

cu $0 < \alpha \leqslant 1$ este simplu convergentă.

3) Seria alternată

$$1 - \ln \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln \frac{4}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

este convergentă. Suma ei este constanta lui Euler

$$C = 0{,}577215\ldots$$

Avem

$$\frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1},$$

deci şirul termenilor seriei date este monoton descrescător, convergent către zero. Suma primilor $2n-1$ termeni este

$$S_{2n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Prin urmare,

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n-1} = C.$$

4) Seria alternată

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \ldots$$

este convergentă, deoarece

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0, \text{ cînd } n \to \infty.$$

§ 8. CALCULUL SUMEI SERIILOR CONVERGENTE

1. Serii absolut convergente

O dată stabilită convergenţa unei serii, a doua problemă de rezolvat este calculul sumei seriei. În legătură cu seriile absolut convergente avem următoarea

Teoremă. Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obţine tot o serie absolut convergentă şi cu aceeaşi sumă.

Demonstraţie. Fie seria absolut convergentă

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots$$

Pentru $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem

$$|u_{N+p}| + |u_{N+p+1}| + \ldots + |u_{N+q}| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (N(\varepsilon) = N),$$

deci

$$|s_{N+q} - s_{N+p}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

oricare ar fi $p, q, q > p$.

Putem alege numărul N astfel încît să avem şi

$$|s - s_N| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Să presupunem acum că am schimbat ordinea termenilor într-un mod oarecare. Fie noua serie astfel obținută

$$v_1 + v_2 \ldots + v_n + \ldots$$

Există un număr N_1 astfel încît pentru $m > N_1$ toți termenii cuprinși în s_n să fie cuprinși și în σ_m, σ_m fiind sumele parțiale ale seriei $\sum_1^\infty v_n$. Evident, suma σ_m va conține și alți termeni decît acei conținuți de s_n, însă toți vor fi de rang superior lui N, fie ei $u_{N+k1}, u_{N+k2}, \ldots, u_{N+k_{m-N}}$; avem

$$|\sigma_M - s_N| < \left|\sum_{i=1}^{m-N} u_{N+k_i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m-N} |u_{N+k_i}| < \frac{\varepsilon}{2}, \ (m > N_1)$$

și din egalitatea evidentă

$$s - \sigma_m = s - s_N + (s_N - \sigma_m)$$

avem și

$$|s - \sigma_m| \leqslant |s - s_N| + |s_N - \sigma_m| < \varepsilon,$$

deci s_n și σ_m au aceeași limită s.

Teorema este valabilă și pentru seriile cu termeni pozitivi care sînt absolut convergente.

2. Aproximarea sumei unei serii cu termenii pozitivi

Unei serii cu termeni pozitivi

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

convergentă nu îi putem totdeauna găsi suma, ci ne mulțumim de cele mai multe ori cu o valoare aproximativă s_p, ce se obține însumînd un număr p de termeni ai seriei, deci

$$s = s_p + r_p.$$

Pentru a găsi o margine superioară a erorii pe care o facem asupra sumei s înlocuind-o cu s_p, trebuie să găsim o margine superioară a restului r_p; această margine superioară se obține înlocuind seria care reprezintă pe r_p cu o serie majorantă, a cărei sumă se poate calcula ușor.

Să presupunem că seria dată $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ îndeplinește condiția $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k < 1$ începînd de la un rang $n \geqslant p + 1$; avem

$$r_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots \leqslant u_{p+1}(1 + k + k^2 + \ldots) = \frac{u_{p+1}}{1-k},$$

deci

$$r_p \leqslant \frac{u_{p+1}}{1-k}$$

şi am găsit astfel o majorantă a restului seriei. Dacă $\varepsilon > 0$ şi cerem ca $r_p < \varepsilon$, din condiţia

$$\frac{u_{p+1}}{1-k} < \varepsilon$$

putem determina numărul p.

3. Serii semiconvergente

Între seriile absolut convergente şi cele simplu convergente (sau semiconvergente) există o deosebire esenţială, pusă în evidenţă de următoarea teoremă

Teorema lui Riemann. Într-o serie de numere reale, semiconvergentă, se poate schimba ordinea factorilor astfel încît:
1) seria obţinută să aibă ca sumă un număr dat;
2) seria obţinută să fie divergentă;
3) seria obţinută să fie oscilantă.

Demonstraţie. 1) Am văzut la §7 că seriile formate numai cu termenii pozitivi sau numai cu termenii negativi ai unei serii semiconvergente sînt ambele divergente. Fie acum seria semiconvergentă

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{1}$$

şi S un număr real *oarecare*. Vom ordona termenii seriei (1) în aşa fel încît primii termeni, toţi pozitivi, să aibă ca sumă un număr care să depăşească numărul S, fapt ce este posibil, deoarece seria cu termenii pozitivi este divergentă. După aceşti termeni vom aşeza termenii negativi în ordinea în care se prezintă în serie, pînă ce suma tuturor termenilor este depăşită de S (astfel încît dacă suprimăm ultimul termen suma să depăşească pe S), fapt ce este de asemenea posibil, deoarece şi seria cu termeni negativi este divergentă. În continuare, aşezăm termenii pozitivi pînă ce suma tuturor termenilor depăşeşte numărul S şi aşa mai departe. De fiecare dată vom lua cel mai mic număr de termeni care îndeplineşte condiţia cerută. Să arătăm că seria astfel reordonată este convergentă şi are ca sumă numărul S. Să notăm cu $S_1, S_2, \dots$ sumele parţiale ale acestei serii şi cu r_n numărul tuturor termenilor pozitivi şi negativi luaţi în primele n operaţii. Dacă n este impar, $S_{p_n} > S$ şi u_{p_n} este pozitiv

$$0 < S_{p_n} - u_{p_n} < S$$

sau

$$0 < S_{p_n} - S < u_{p_n},$$

iar dacă n este par, atunci $S_{p_n} < S$ şi u_{p_n} este negativ; avem

$$S_{p_n} - u_{p_n} > S$$

sau

$$0 < S - S_{p_n} < -u_{p_n},$$

deci oricare ar fi paritatea lui n

$$|S - S_{p_n}| < |u_{p_n}|.$$

Seria (1) fiind convergentă, $u_{p_n} \to 0$ cînd $n \to \infty$, deoarece $p_n > n$ şi $p_n \to \infty$, de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty} S_{p_n} = S.$$

2) Vom arăta acum că putem ordona termenii seriei (1) astfel încît suma seriei să fie $+\infty$. Vom lua întîi cel mai mic număr de termeni pozitivi, a căror sumă depășește numărul 1 ; în continuare, vom lua cel mai mic număr de termeni negativi, astfel încît suma totală (termenii pozitivi și cei negativi) să fie inferioară numărului 1.

Vom lua apoi cel mai mic număr de termeni pozitivi, astfel încît suma totală să depășească numărul 2 ; după aceea, cel mai mic număr de termeni negativi, astfel încît suma totală să fie inferioară numărului 2. La a $(2n-1)$ operație vom lua cel mai mic număr de termeni pozitivi, astfel încît suma totală să fie superioară numărului n, și la a $2n$ operație vom lua cel mai mic număr de termeni negativi, astfel încît suma să fie inferioară numărului n ș.a.m.d. Dacă p_{2n} sînt termenii luați după $2n$ operații, avem, în mod asemănător primului caz,

$$0 < S_{p_{2n-1}} - n < u_{p_{2n-1}} \tag{2}$$

$$0 < n - S_{p_{2n}} < -u_{p_{2n}} \tag{3}$$

Cînd $n \to \infty$, $p_{2n} \to \infty$, $p_{2n-1} \to \infty$, deoarece $p_{2n} > n$, $p_{2n-1} > n$. Șirul

$$S_{p_1},\ S_{p_2},\ \ldots, S_{p_{2n-1}},\ S_{p_{2n}},\ \ldots$$

este crescător, nemărginit. Într-adevăr, $A > 0$ fiind dat, N cel mai mic număr natural astfel încît pentru $n > N$ să avem

$$A + 1 < n,\ |u_{p_{2n-1}}| < 1,\ |u_{p_{2n}}| < 1,$$

în aceste condiții obținem din (2)

$$S_{p_{2n-1}} > n - |u_{p_{n-1}}| > n - 1 > A$$

și din (3)

$$S_{p_{2n}} > n - u_{p_{2n}} > n - 1 > A,$$

ceea ce echivalează cu

$$\lim_{n\to\infty} S_{p_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} S_{p_{2n}} = +\infty.$$

3) Să arătăm acum că putem schimba ordinea termenilor în (1) astfel încît șirul sumelor parțiale să aibă două puncte limită.

Fie $S' < S''$ două numere. Să ordonăm termenii seriei (1) astfel : luăm cel mai mic număr de termeni pozitivi, astfel încît suma lor să depășească numărul S'' ; apoi luăm cel mai mic număr de termeni negativi, astfel încît suma totală să fie mai mică decît S'. În continuare, luăm cel mai mic număr de termeni pozitivi, astfel ca suma totală să depășească pe S'', apoi, cel mai mic număr de termeni negativi, astfel încît suma totală să fie inferioară lui S' ș.a.m.d. Dacă notăm cu p_n numărul termenilor luați după n operații, șirul sumelor parțiale

$$S_{p_1},\ S_{p_3},\ S_{p_5},\ \ldots$$

este convergent către S'', iar șirul

$$S_{p_2},\ S_{p_4},\ S_{p_6},\ \ldots$$

este convergent către S', deci șirul sumelor parțiale al seriei (1) astfel ordonate este mărginit, însă nu este convergent. Teorema este demonstrată.

Exemplu

Seria armonică alternată este semiconvergentă. Să ordonăm termenii acestei serii astfel încît un termen pozitiv să fie urmat de doi termeni negativi ; vom avea

$$S' = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \ldots,$$

însă

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}=\frac{1}{4n-2},$$

deci

$$S'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

şi dacă notăm

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots.$$

avem

$$S'=\frac{1}{2}S.$$

Să adunăm acum termenii seriei astfel încît doi termeni pozitivi să fie urmaţi de unul negativ; vom avea

$$S''=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\ldots,$$

însă

$$\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}=\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right),$$

deci

$$S''=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$S''=S+\frac{1}{2}S=\frac{3}{2}S.$$

Se vede că sumele S, S', S'' nu sînt aceleaşi.

4. Aproximarea sumei unei serii alternate

Fie seria alternată, convergentă,

$$s=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$$

Putem scrie

$$s=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{2n}-u_{2n+1})-\ldots,$$

precum şi

$$s=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2n-1}-u_{2n})+\ldots,$$

din care deducem, deoarece $u_p>u_{p+1}$,

$$s<s_{2n+1}$$

$$s>s_{2n+2}.$$

Însă

$$s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1}$$

şi

$$s_{2n+1} - s_{2n+2} = u_{2n+2},$$

din care obţinem

$$0 < s - s_{2n} < u_{2n+1}$$

$$0 < s_{2n+1} - s < u_{2n+2},$$

deci

$$0 < (s - s_n)\ (-1)^n < u_{n+1},$$

care se exprimă în modul următor:

Dacă adunăm un număr finit de termeni dintr-o serie alternată, convergentă, eroarea pe care o facem este inferioară primului termen neglijat, prin lipsă sau adaos, după cum numărul termenilor însumaţi este par sau impar.

Exemplu

Pentru a afla suma seriei alternate

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

cu cinci zecimale exacte, $r_n < \frac{1}{10^5}$, trebuie să însumăm primii $10^5 - 1 = 99\,999$ termeni.

Spunem că seria alternată este *slab convergentă.*

5. Numărul *e*

Numărul e este definit fie ca suma seriei

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots, \tag{1}$$

fie ca limita şirului

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2}$$

Să considerăm mai întîi numărul e definit ca suma seriei (1). Seria (1) este convergentă, deoarece, după criteriul raportului,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Dacă notăm

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots$$

rezultă $e = e_n + r_n$. Să găsim o limită superioară a erorii pe care o facem asupra lui e oprindu-ne la primii $n + 1$ termeni; observăm că

$$r_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right] < \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right],$$

deci

$$r_n < \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n} \text{ sau } r_n = \frac{1}{n!}\cdot\frac{\theta}{n} \text{ cu } 0 < \theta < 1.$$

Pentru $n = 1$, avem $e = 2 + \theta$, deci $2 < e < 3$.

Dacă $n = 6$, $r_n < \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{6} = 0{,}0002$; prin urmare, dacă însumăm primii şapte termeni obţinem pe e cu trei zecimale exacte; dacă $n = 8$, obţinem $r_n < \frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{8} = 0{,}000003$, adică însumînd primii nouă termeni obţinem numărul e cu 5 zecimale exacte.

Ne propunem să calculăm numărul e cu 15 zecimale exacte. Pentru aceasta trebuie să calculăm suma a 17 termeni, deoarece

$$r_{17} < \frac{1}{17!\,17} < \frac{2}{10^{16}}.$$

Fiecare termen din cei 17 trebuie calculat cu 18 zecimale exacte, deoarece eroarea provenind de la termenul al 18-lea pentru toţi termenii este mai mică decît $\frac{15}{10^{18}}$ şi suma erorilor îndeplineşte condiţia cerută, deoarece

$$\frac{15}{10^{18}} + \frac{2}{10^{16}} = 0{,}000.000.000.000.000.215 < \frac{1}{10^{15}}.$$

Făcînd calculul efectiv, avem

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2{,}5$$

$$\frac{1}{3!} \simeq 0{,}166.666.666.666.666.666$$

$$\frac{1}{4!} \simeq 0{,}041.666.666.666.666.666$$

$$\frac{1}{5!} \simeq 0{,}008.333.333.333.333.333$$

$$\frac{1}{6!} \simeq 0{,}001.388.888.888.888.888$$

$$\frac{1}{7!} \simeq 0{,}000.198.412.698.412.698$$

$$\frac{1}{8!} \simeq 0{,}000.024.801.587.301.587$$

$$\frac{1}{9!} \simeq 0{,}000.002.755.731.922.398$$

$$\frac{1}{10!} \simeq 0{,}000.000.275.573.192.239$$

$$\frac{1}{11!} \simeq 0{,}000.000.025.052.108.385$$

$$\frac{1}{12!} \simeq 0{,}000.000.002.087.675.690$$

$$\frac{1}{13!} \simeq 0{,}000.000.000.160.590.437$$

$$\frac{1}{14!} \simeq 0{,}000.000.000.011.470.745$$

$$\frac{1}{15!} \simeq 0{,}000.000.000.000.764.716$$

$$\frac{1}{16!} \simeq 0{,}000.000.000.000.047.794$$

$$\frac{1}{17!} \simeq 0{,}000.000.000.000.002.811$$

şi însumînd
$2{,}718.281.828.459.045.053 < e < 2{,}718.281.828.459.045.268$, deci valoarea lui e cu 15 zecimale exacte este

$$e \simeq 2{,}718.281.828.459.045.$$

Numărul e este irațional. Folosind seria (1), putem arăta că numărul e nu este rațional.

Dacă p şi q sînt întregi primi între ei, trebuie să arătăm că nu putem avea

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q!}\cdot\frac{\theta}{q},\ 0 < \theta < 1.$$

Înmulțind ambii termeni cu $q!$ rezultă

$$p\cdot(q-1)! = \text{întreg} + \frac{\theta}{q},$$

ceea ce este imposibil. În 1873, Ch. Hermite a arătat că numărul e este transcendent.

Echivalenţa celor două definiţii. Să considerăm acum numărul e definit ca limita şirului (2). Vom nota

$$E = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Am arătat că şirul $E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este crescător şi mărginit, deci convergent.

Să arătăm că $E = e$. Avem

$$E_n = 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!} \tag{3}$$

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

deci

$$E_n < e_n < e \tag{4}$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = E < e.$

Dacă păstrăm în (3) pe m fix şi facem pe n să tindă către infinit, rezultă, dacă notăm cu $E_{m,n}$ suma primilor $m+1$ termeni din (3), că

$$\lim_{n\to\infty} E_{m,n} = e_m,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} E_{n,n} = \lim_{n\to\infty} E_n \geqslant e_m, \text{ oricare ar fi } m,$$

sau

$$E \geqslant e. \tag{5}$$

Comparînd pe (4) şi (5), urmează că $E = e$.

Raţionamentele de mai sus au fost făcute în ipoteza că n este un număr natural, deoarece am folosit formula binomului lui Newton, care nu este valabilă decît dacă n este întreg şi pozitiv.

a) Să arătăm că

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, (n \text{ întreg negativ}).$$

Avem

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\right] = e.$$

b) Presupunem acum că n este un număr real și pozitiv oarecare. Există două numere întregi consecutive m și $m+1$ astfel încît $m < n < m+1$; atunci

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{n} > \frac{1}{m+1}$$

și

$$1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{m+1}.$$

Prin urmare,

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m}$$

și trecînd la limită

$$\lim_{m\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)\right] \geqslant \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{m\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \cdot \frac{m+1}{m+2}\right],$$

din care obținem

$$e \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant e, \quad n \in R,$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e, \quad n \in R.$$

Avem și

a) dacă $x_n \to +\infty$, atunci $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$;

b) dacă $x_n \to -\infty$, atunci $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$;

c) dacă $x_n \to 0$, $x_n > 0$, atunci $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$;

d) dacă $x_n \to 0$, $x_n < 0$, atunci $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$.

Aplicaţii

1) Să arătăm că

$$\lim_{x_n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a.$$

Putem scrie

$$\lim_{x_n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{x_n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{a}}\right]^a = \left[\lim_{x_n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{a}}\right]^a = e^a.$$

2) Avem

$$\lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} \frac{\ln (1 + x_n)}{x_n} = 1.$$

Într-adevăr,

$$\lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} \frac{\ln (1 + x_n)}{x_n} = \lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} \ln \left[1 + x_n\right]^{\frac{1}{x_n}} = \ln e = 1.$$

Rezultatul este acelaşi dacă $x_n \to 0$ cu $x_n < 0$ şi $1 + x_n > 0$.

6. Rapiditatea de convergenţă a unei serii

Am văzut din aliniatele precedente că pentru aproximarea sumei unei serii convergente era nevoie de însumat un număr mai mic sau mai mare de termeni.

Pentru calculul sumei seriei armonice alternate (vom arăta mai tîrziu că suma ei este ln 2) cu cinci zecimale exacte este nevoie de însumat 99 999 termeni, în timp ce pentru calculul lui e cu 15 zecimale exacte a fost nevoie de însumat numai 17 termeni.

Spunem că seria lui e este *mai repede convergentă* decît seria armonică alternată. Rapiditatea de convergenţă a unei serii are o deosebită importanţă practică.

Definiţie. Vom spune că seria $\sum_1^\infty u_n$ este mai repede convergentă decît seria $\sum_1^\infty v_n$ dacă

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{R_n} = 0,$$

unde r_n și R_n sînt, respectiv, resturile seriilor $\sum_1^\infty u_n$ și $\sum_1^\infty v_n$.

O condiție suficientă * pentru ca seria $\sum_1^\infty u_n$ să fie mai repede convergentă decît seria $\sum_1^\infty v_n$ este ca

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0. \tag{1}$$

Ne interesează, îndeosebi, să transformăm o serie slab convergentă într-o serie mai repede convergentă.

Transformarea lui Euler. Fie

$$(S)\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$$

o serie convergentă, în care numerele u_n nu sînt neapărat pozitive.
Seria

$$(S')\ \frac{u_1}{2} - \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{u_3 - u_2}{2} - \frac{u_4 - u_3}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{u_n - u_{n-1}}{2} + \ldots + \ldots$$

are aceeași sumă ca (S).

Demonstrație. Dacă S_n și S'_n sînt sumele parțiale ale celor două serii, avem

$$S_n - S'_n = \frac{(-1)^n}{2} u_n \to 0, \text{ cînd } n \to \infty.$$

Prin transformarea lui Euler, unele serii se transformă în serii mai repede convergente.

Exemplu

$$1)\ \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

Dacă aplicăm o dată transformarea lui Euler, avem

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \ldots + \frac{1}{4n(2n-1)} - \frac{1}{4n(2n+1)} + \ldots$$

---

* Analiza matematică, vol. I, Acad. **Miron Nicolescu**, **Ed. tehnică** 1957, p. 264–280.

Dacă aplicăm seriei obţinute acelaşi procedeu $\left(\text{luăm } u_1' = \frac{3}{4}\right)$,

avem

$$\ln 2 = \frac{3}{8} + \frac{8}{24} - \frac{1}{48} + \frac{1}{120} - \ldots + \frac{1}{4n\,(4n^2-1)} - \frac{1}{8n\,(n+1)\,(2n+1)} + \ldots$$

şi încă o dată

$$\ln 2 = \frac{17}{48} + \frac{33}{96} - \frac{1}{160} + \frac{1}{480} - \ldots + \frac{3}{8n\,(4n^2-2)\,(2n+2)} - \frac{3}{16\,n\,(n+1)\,(2n+1)\,(2n+3)} + \ldots \tag{2}$$

Pentru calculul lui ln 2 cu trei zecimale exacte era nevoie, plecînd de la seria armonică alternată, să însumăm 999 termeni. Dacă însumăm în (2) termenii

$$\frac{67}{48} - \frac{1}{160} + \frac{1}{480},$$

găsim pe ln 2 cu 3 zecimale exacte. Într-adevăr

$$\ln 2 \simeq 0{,}697 - 0{,}006 + 0{,}002 = 0{,}693.$$

În B., cap. I, §6, al. 8 am găsit ln 2 = 0,69315 cu cinci zecimale exacte.

Transformarea lui Kummer. Dacă seria $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ este convergentă, iar seria $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ are o sumă cunoscută a şi $\frac{u_n}{a_n} \to \lambda$ cînd $n \to \infty$, atunci seria

$$\lambda a + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \lambda a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

transformă seria iniţială într-o serie mai repede convergentă.

Demonstraţie. Condiţia suficientă (1) este îndeplinită, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n - a_n\lambda}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a_n}{u_n}\lambda\right) = 0.$$

Dacă notăm cu S_n şi S_n' sumele parţiale ale seriilor $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ şi $a\lambda + \sum\limits_{1}^{\infty} (u_n - \lambda a_n)$, avem

$|S_n - S_n'| = |\lambda| \cdot |a - a_1 - a_2 - \ldots - a_n| < |\lambda| \cdot \varepsilon$, dacă $n > N(\varepsilon)$, deci cînd $n \to \infty$, $(S_n - S_n') \to 0$.

Exemplu

Să se verifice egalitatea

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (4n^2 - 1)}.$$

Luăm pentru $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ pe $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1}$, însă

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1} = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n - 1} - 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} = 2.$$

Avem, de asemenea, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{4n^2 - 1}{4} = 1$, deci transformarea lui Kummer dă

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{4}{4n^2 - 1} \right) = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (4n^2 - 1)}.$$

Seria din partea a doua este mai repede convergentă.

Capitolul II

FUNCȚII. LIMITE. CONTINUITATE

§ 1. FUNCȚII

1. Definiția funcției.

Fie X și Y două mulțimi.

D e f i n i ț i e. Dacă, printr-un procedeu oarecare, facem să corespundă fiecărui element $x \in X$ un element $y \in Y$ și n u m a i u n u l spunem că am definit o f u n c ț i e pe X cu valori în Y.

Prin *funcție* înțelegem ansamblul format din: mulțimea X, mulțimea Y și corespondența $x \to y$ de la X la Y.

X se numește *mulțimea de definiție* sau *domeniul de definiție* al funcției, iar Y mulțimea în care funcția ia valori.

O funcție se notează cu o literă: f, g sau F, Φ etc.

Dacă printr-o funcție f unui element $x_0 \in X$ îi corespunde elementul (unic) $y_0 \in Y$, spunem că y_0 este valoarea funcției în punctul x_0 și se notează

$$y_0 = f(x_0).$$

Un element oarecare x al mulțimii de definiție X se numără *variabilă* sau *argument* al funcției f. Funcția f se reprezintă, de asemenea, și prin

$$x \to f(x),\ x \in X$$

sau numai

$$f(x), \quad x \in X.$$

E x e m p l e

1) Funcția f definită pe R, care face ca fiecărui număr x să-i corespundă cubul său x^3, $x \to x^3$, $x \in R$, se notează

$$f(x) = x^3.$$

Domeniul de definiție este R, domeniul valorilor tot R.

2) Un șir de numere reale (a_n) este o funcție

$$n \to a_n$$

cu domeniul de definiție mulțimea numerelor naturale $N \ni n$; mulțimea în care funcția ia valori este mulțimea numerelor reale R.

Noţiunea de funcţie s-a introdus în matematică ca urmare a necesităţii studiului interdependenţei fenomenelor din natură. „Metoda dialectică de studiu a fenomenelor naturii şi a proceselor tehnice cere ca mărimile care participă şi care variază într-un proces oarecare să nu fie studiate separat, izolate unele de altele, ci în conexiunea lor, în interdependenţa care le leagă în realitate. Ideea de dependenţă funcţională este expresia matematică a acestei conexiuni dintre mărimile reale, în cazurile cele mai simple" *.

Exemple

1) Spaţiul s, în căderea punctului pe verticală, sub acţiunea gravităţii, este funcţie de timpul t

$$s = \frac{1}{2} g\, t^2,$$

unde g este acceleraţia gravităţii.

2) Relaţia între presiunea p şi densitatea ρ a unui gaz în cazul adiabatic este dată de expresia

$$p = k\rho^\gamma, \qquad k,\ \gamma \text{ constante.}$$

3) Densitatea ρ a gazului în mişcare este funcţie de V, viteza particulei fluide considerate,

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{V^2}{C_0^2}\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad \rho_0,\ C_0,\ \gamma \text{ constante.}$$

Domeniul de definiţie este intervalul $X = \left\{V \mid 0 \leqslant V \leqslant C_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}\right\}$.

4) Volumul unei sfere de rază r este funcţie de rază

$$V = \frac{4}{3} \pi\, r^3,$$

cu domeniul de definiţie semiaxa reală $r \geqslant 0$.

Din definiţia dată noţiunii de funcţie rezultă că două funcţii f şi g sînt egale dacă sînt definite pe aceeaşi mulţime X, au valori în aceeaşi mulţime Y şi dacă stabilesc aceeaşi corespondenţă

$$f(x) = g(x), \text{ pentru orice } x \in X.$$

Se numesc *funcţii reale* de *o variabilă reală* funcţiile cu valori numere reale definite pe mulţimi de numere reale.

Exemple

1) $f(x) = 2^x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$: domeniul valorilor este intervalul $[2, 4]$.

2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0, & x > a, \end{cases}$

are domeniul valorilor intervalul $[0, a^2]$.

---

* A. I. Hincin, *Curs scurt de analiză matematică*, Ed. tehnică, 1956, p. 21.

2. Graficul unei funcții

Corespondența $x \to f(x)$ stabilită de funcția f între mulțimea de definiție X și mulțimea valorilor Y se poate reprezenta prin perechi ordonate $(x, f(x))$. Dacă considerăm produsul cartezian $X \times Y$, perechea $(x, f(x))$ este un element al acestui produs.

D e f i n i ț i e. Se numește graficul funcției f, $x \in X$ mulțimea G_f a perechilor $(x, f(x))$, deci

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\},$$

și are următoarele proprietăți:

1) fiecare element $x \in X$ face parte dintr-o pereche și numai din una a graficului G_f;

2) în fiecare pereche (x, y) a graficului, cele două coordonate x, y verifică egalitatea

$$y = f(x).$$

Pentru orice altă pereche (x, y) care nu aparține graficului avem $y \neq f(x)$.

Egalitatea

$$y = f(x)$$

verificată de toate elementele (x, y) ale graficului și numai de acestea se numește ecuația graficului funcției f; vom folosi din această cauză pentru funcție și notația $y = f(x)$.

E x e m p l e

1) Graficul funcției $f(n) = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$, $n \in N$, este dat de figura 26.

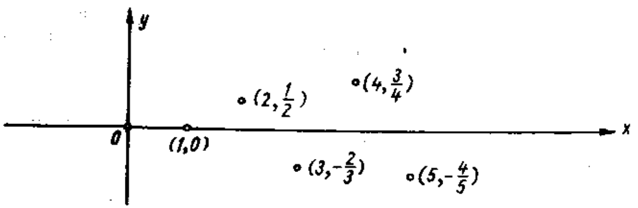


Fig. 26

Valorile funcției sînt termenii șirului $0;\ \dfrac{1}{2};\ -\dfrac{2}{3};\ \dfrac{3}{4};\ \ldots,\ (-1)^n \dfrac{n-1}{n},\ \ldots$

2) Graficul funcției

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant +1, \\ 0 & , \quad x \in R - [-1, +1], \end{cases}$$

este dat de figura 27.

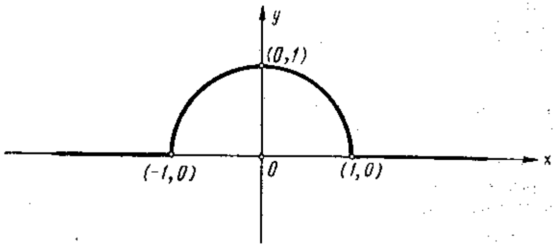


Fig. 27

3. Funcție compusă

Se folosește adesea notația $f: X \to Y$ pentru o funcție definită pe X cu valori în Y; se spune, de asemenea, că f este *o aplicație* a mulțimii X în mulțimea Y.

Fie $f: X \to Y$ și $g: Y \to Z$. Un element $x \in X$ este transformat de funcția f în elementul unic $f(x) \in Y$; la rîndul său, elementul $f(x) \in Y$ este transformat de funcția g în elementul unic $g(f(x)) \in Z$; am realizat astfel o corespondență $x \to g(f(x))$ de la X la Z.

Definiție. Funcția definită pe X cu valori în Z de

$$x \to g(f(x)) \quad , \quad x \in X,$$

se numește funcția compusă a funcției g și f (în această ordine).

Exemplu

$$f(x) = 2^x, \quad g(f(x)) = f^2(x) = 2^{2x} = 4^x.$$

4. Funcție inversă

Definiția 1. Se spune că funcția $f: X \to Y$ este biunivocă dacă, oricare ar fi elementele $x' \neq x''$ din X, avem $f(x') \neq f(x'')$.

Definiția 2. Se spune că f este o aplicație a lui X pe Y dacă mulțimea valorilor lui f, care se notează $f(X)$, este egală cu mulțimea Y, deci dacă $f(X) = Y$.

O *aplicație biunivocă* f a lui X pe Y are, prin urmare, următoarele proprietăți

a) $f(X) = Y$;

b) $x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$;

c) $f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$;

d) pentru orice element $y \in Y$ există un element și numai unul $x \in X$ astfel încît $f(x) = y$.

Proprietatea *d* arată că putem stabili o corespondență

$$f(x) \to x, \qquad f(x) \in Y,$$

de la elementele lui Y la elementele lui X, corespondență care se numește *aplicația reciprocă* sau *funcția inversă* a funcției f și se notează f^{-1}.

Definiție. Se numește funcția inversă a funcției biunivoce f funcția f^{-1} prin care fiecărui element $y \in Y$ îi corespunde acel element (unic) $x \in X$ pentru care $f(x) = y$.

Din definiție rezultă că:

1) $f(x) = y \Leftrightarrow x = \overset{-1}{f}(y)$;

2) f^{-1} este o aplicație biunivocă a lui Y pe X, deci funcția sa inversă este f. Funcțiile f și f^{-1} sînt, prin urmare, una inversa celeilalte.

Graficul funcției inverse $y = \overset{-1}{f}(x)$ este format din perechile (y, x), deci este simetricul față de prima bisectoare (x, x) al graficului $y = f(x)$.

Se mai observă că mulțimea de definiție a funcției f devine mulțimea valorilor pentru funcția f^{-1} și reciproc.

Exemple

1) $y = f(x) = 4x$, $x \geqslant 0$, are funcția inversă $x = \overset{-1}{f}(y) = \frac{1}{4}y$, cu $y \geqslant 0$.

2) $y = f(x) = x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, are ca funcție inversă

$$x = \overset{-1}{f}(y) = \sqrt{y}; \quad 1 \leqslant y \leqslant 4.$$

5. Operații cu funcții reale

Fie E o mulțime, A și B două submulțimi ale lui E cu intersecția nevidă $A \cap B \neq \varnothing$, f și g două funcții definite pe A și B respectiv, cu valori în R.

Domeniile valorilor lui f și g sînt submulțimi ale corpului numerelor reale; prin urmare, efectuînd operațiile algebrice obișnuite asupra valorilor funcțiilor, obținem funcții noi.

1) Suma a două funcții f, g este funcția $f + g$ definită pe $A \cap B$ de egalitatea

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in A \cap B.$$

2) Diferența dintre funcția f și funcția g este funcția $f - g$ definită pe $A \cap B$ de egalitatea

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad x \in A \cap B.$$

3) Produsul dintre funcția f și funcția g este funcția $f \cdot g$ definită pe $A \cap B$ de egalitatea

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in A \cap B.$$

4) Cîtul dintre funcția f și funcția g este funcția $\frac{f}{g}$ definită pe mulțimea $A \cap B - C$, unde $C = \{x \mid x \in B, g(x) = 0\}$, de egalitatea

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in A \cap B - C.$$

6. Relația de ordine

Fie două funcții f și g definite pe o aceeași mulțime X. Vom scrie $f \leqslant g$ sau $g \geqslant f$ dacă $f(x) \leqslant g(x)$ pentru orice $x \in X$.

Relația „$f \leqslant g$" este o *relație de ordine* pe mulțimea funcțiilor definite pe mulțimea X și are proprietățile:

1) $f \leqslant f$;

2) $f \leqslant g, \quad g \leqslant f \Rightarrow f = g$;

3) $f \leqslant g, \quad g \leqslant h \Rightarrow f \leqslant h$;

4) $f \leqslant g \Leftrightarrow f + h \leqslant g + h$;

5) $f \leqslant g, \quad h \geqslant 0 \Rightarrow f \cdot h \leqslant gh$;

$\qquad\qquad h \leqslant 0 \Rightarrow f \cdot h \geqslant g \cdot h$.

Dacă $f(x) \geqslant 0$, $x \in X$, spunem că funcția f este pozitivă pe X. Dacă $f(x) > 0$, $x \in X$, spunem că funcția f este strict pozitivă pe X. Dacă $f(x) \leqslant 0$, $x \in X$, spunem că funcția f este negativă pe X, iar dacă $f(x) < 0$, $x \in X$, spunem că funcția f este strict negativă pe X.

Funcția $|f|$ se numește *modulul lui* f și este definită de

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad x \in X.$$

$|f|$ este funcție pozitivă pe X.

7. Funcții mărginite. Funcții monotone

O funcție $f : X \to R$ spunem că este mărginită inferior (sau minorată) pe mulțimea $A \subseteq X$ dacă există un număr $a \in R$ astfel încît mulțimea valorilor lui f pe A, $f(A)$, să fie mărginită inferior de a

$$a \leqslant f(A).$$

Marginea inferioară a mulțimii $f(A)$ se numește marginea inferioară a funcției f pe mulțimea A și se notează $\inf\limits_{x \in A} f(x)$.

Numărul $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ are următoarele proprietăți:

1) $m \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in A$;

2) dacă $m < \alpha$, există $x \in A$ astfel încît $f(x) < \alpha$.

O funcție $f: X \to R$ spunem că este mărginită superior (sau majorată) pe mulțimea $A \subseteq X$ dacă există un număr $b \in R$ astfel încît mulțimea valorilor lui f pe A, $f(A)$, să fie mărginită superior de b

$$f(A) \leqslant b.$$

Marginea superioară a mulțimii $f(A)$ se numește marginea superioară a funcției f pe mulțimea A și se notează $\sup\limits_{x \in A} f(x)$.

Numărul $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ are următoarele proprietăți:

1) $M \geqslant f(x)$ pentru orice $x \in A$;

2) dacă $\beta < M$ există $x \in A$ astfel încît $f(x) > \beta$.

O funcție $f: X \to R$ mărginită superior și inferior pe mulțimea $A \subseteq X$ se numește mărginită pe mulțimea A. Mulțimea valorilor $f(A)$ este mărginită

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \ x \in A,$$

și avem $m = M$ dacă și numai dacă f este constantă pe A, adică ia aceeași valoare în toate punctele $x \in A$.

Dacă o funcție f este mărginită pe tot domeniul de definiție X spunem că este *mărginită*.

Faptul că o funcție f este mărginită se mai scrie

$$|f(x)| \leqslant M, \ x \in X, \ M > 0.$$

Graficul unei funcții mărginite este cuprins între dreptele $y = m$ și $y = M$, paralele cu axa Ox.

Exemplu

Funcția $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant +1$, este mărginită superior și inferior; $M = 1$, $m = 0$.

O funcție $f: X \to R$ care nu este mărginită inferior pe $A \subseteq X$ spunem că este mărginită inferior de $-\infty$

$$\inf_{x \in A} f(x) = -\infty,$$

iar marginea sa inferioară este $-\infty$.

O funcție $f: X \to R$ care nu este mărginită superior pe $A \subseteq X$ spunem că este mărginită superior de $+\infty$

$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty,$$

iar marginea sa superioară este $+\infty$.

Exemple

1) Funcția $f(x) = x^n$, $x \in R$, pentru $n \in N$ și par are $\inf f(x) = 0$ și $\sup f(x) = +\infty$; pentru $n \in N$ și impar, $\inf f(x) = -\infty$, $\sup f(x) = +\infty$, (fig. 28 și fig. 29).

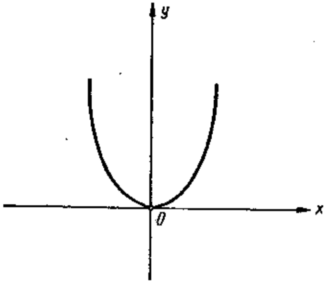


Fig. 28

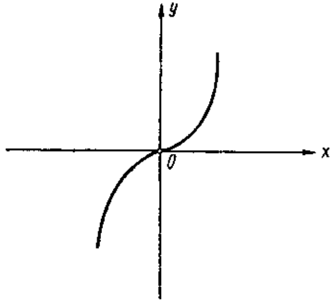


Fig. 29

2) Funcția $f(x) = 2^x$, $x \in R$, are $m = 0$, $M = +\infty$, (fig. 30).

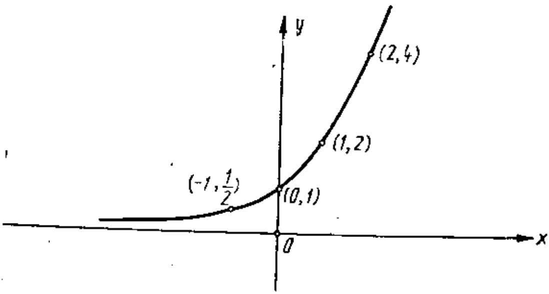


Fig. 30

3) Funcția $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $x \in R$, este mărginită; $m = -1$, $M = +1$. Graficul funcției este cuprins între dreptele $y = -1$ și $y = +1$, (fig. 31).

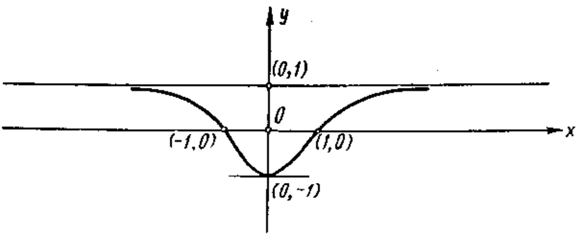


Fig. 31

O funcție $f: X \to R$ spunem că este *crescătoare* pe mulțimea $A \subseteq X$ dacă, oricare ar fi $x' < x''$, $x' \in A$, $x'' \in A$, avem $f(x') \leqslant f(x'')$, adică

$$x' < x'' \Rightarrow f(x') \leqslant f(x''), \quad x', x'' \in A.$$

Funcția f este *strict crescătoare* pe mulțimea $A \subseteq X$ dacă

$$x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x''), \; x', x'' \in A.$$

O funcție $f: X \to R$ spunem că este *descrescătoare* pe mulțimea $A \subseteq X$ dacă, oricare ar fi $x' < x''$, $x' \in A$, $x'' \in A$, avem $f(x') \geqslant f(x'')$, adică

$$x' < x'' \Rightarrow f(x') \geqslant f(x''), \; x', x'' \in A.$$

Funcția f este *strict descrescătoare* pe mulțimea $A \subseteq X$

$$x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x''), \; x', \; x'' \in A.$$

Funcțiile crescătoare sau descrescătoare se numesc *funcții monotone*.
Funcțiile strict crescătoare sau strict descrescătoare se numesc funcții *strict monotone*.

Exemple

1) Funcția 3^x, $x \in R$, este strict crescătoare.
2) Funcția 2^{-x}, $x \in R$, este strict descrescătoare.
3) Funcția $f(x) = E(x)$, $x \in R$, unde $E(x)$ este întregul cel mai mare conținut în numărul x, numită funcția în trepte, este crescătoare, (fig. 32).

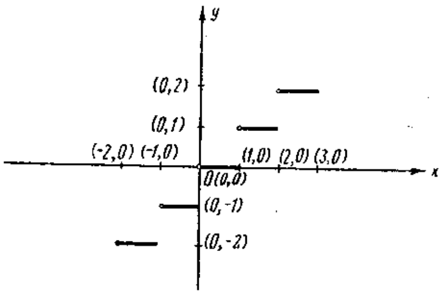


Fig. 32

Teoremă. Funcțiile strict monotone se pot inversa.

Demonstrație. Fie $f: X \to Y$ o funcție strict monotonă pe X; dacă $x' \neq x''$, $x' \in X$, $x'' \in X$, atunci sau $f(x') > f(x'')$, sau $f(x') < f(x'')$, deci avem întotdeauna $f(x') \neq f(x'')$; prin urmare, aplicația f este biunivocă; urmează că avem $y \to x$, $y \in Y$, pentru $y = f(x)$, deci f se poate inversa.
Să arătăm acum că dacă $f: X \to Y$ este strict crescătoare (sau strict des-

crescătoare) funcția inversă $\overset{-1}{f}: Y \to X$ este tot strict crescătoare (sau strict descrescătoare). Într-adevăr, presupunînd că f este strict crescătoare,

$$x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x''),\ x', x'' \in X, \tag{1}$$

punînd $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$, să arătăm că

$$\overset{-1}{f}(y') < \overset{-1}{f}(y'').$$

Să presupunem prin absurd că $\overset{-1}{f}(y') \geqslant \overset{-1}{f}(y'')$, însă

$$\overset{-1}{f}(y') = x',\ \overset{-1}{f}(y'') = x'',$$

și ipoteza făcută conduce la $x' \geqslant x''$, ceea ce este în contradicție cu (1), deci nu putem avea decît

$$\overset{-1}{f}(y') < \overset{-1}{f}(y'').$$

Exemple

1) Funcția $f(n) = \frac{1}{n}$, $n \in N$ este un șir strict descrescător. Funcția inversă are domeniul de definiție mulțimea $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, domeniul valorilor mulțimea numerelor naturale N și este tot strict descrescătoare, (fig. 33).

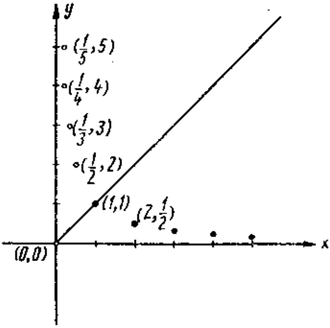


Fig. 33

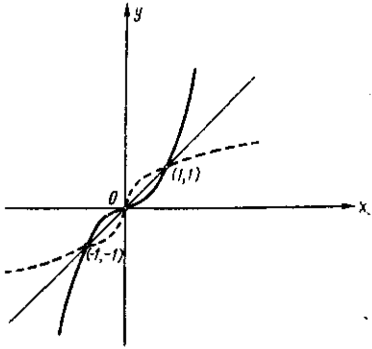


Fig. 34

2) Funcția $f(x) = x^{2n+1}$, $x \in R$, este strict crescătoare; funcția inversă $\overset{-1}{f}(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ este tot strict crescătoare și are graficul din figura 34, obținut prin simetrie față de prima bisectoare a graficului lui $f(x)$ (linia punctată), (fig. 34).

§ 2. LIMITE DE FUNCȚII

1. Limita într-un punct

D e f i n i ț i a 1. Fie f o funcție definită pe $X \subseteq R$, cu valori în R, $f: X \to R$, x_0 un punct de acumulare al mulțimii X. Se spune că un număr $y_0 \in R$ este limita funcției f în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui y_0 există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, oricare ar fi $x \neq x_0$ din $V \cap X$, să avem $f(x) \in U$ și se scrie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Se citește „limita lui $f(x)$ cînd x tinde către x_0 este egală cu y_0".

O b s e r v a ț i i

1) Punctul x_0 nu este necesar să aparțină mulțimii de definiție X. Trebuie să fie însă *punct de acumulare* al mulțimii de definiție. Dacă x_0 este un punct exterior sau punct izolat al mulțimii X, problema existenței limitei funcției în punctul x_0 *nu are sens*, deoarece, în acest caz, $V \cap X - \{x_0\} = \emptyset$.

2) Atît numărul x_0 cît și numărul y_0 pot fi finite sau infinite, vecinătățile V și U fiind definite corespunzător.

3) Numărul y_0 nu este totdeauna valoarea funcției în punctul x_0, $f(x_0)$. Din definiție rezultă că x_0 poate să nu *aparțină* domeniului de definiție. În procesul de trecere la limită ne interesează *comportarea funcției* în jurul lui x_0 și *nu* în punctul x_0; prin urmare, trebuie să existe $x \neq x_0$ oricît de vecine de x_0, de unde urmează că x_0 trebuie să fie punct de acumulare al mulțimii de definiție.

E x e m p l e

1) Să se calculeze $\lim_{x \to x_0} f(x)$ pentru $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ și $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$.

a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$;

c) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$ nu are sens, deoarece funcția nu este definită pentru $x > 1$;

d) $\lim_{x \to 2} f(x)$ nu are sens, deoarece în vecinătatea lui 2 funcția nu este definită.

2) Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \ln x$.

Domeniul de definiție al funcției $f(x) = \ln x$ este $(0, \infty)$, deci orice vecinătate a lui 0 conține puncte ale domeniului de definiție

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty.$$

Pentru funcția $\ln x$ nu are sens calculul limitei într-un punct $x_0 < 0$, deoarece funcția este definită numai pentru $x > 0$.

Definiția II. **Fie $f: X \to R$ și x_0 un punct de acumulare al lui X. Se spune că $f(x)$ are limita y_0 în punctul x_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem**

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon$$

pentru orice

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon), \; x \in X.$$

Numerele x_0 și y_0 sînt considerate finite.

Observații

1) Definiția II, numită și definiția cu ajutorul lui ε, este de fapt echivalentă cu definiția cu ajutorul vecinătăților, dacă x_0 și y_0 sînt finite, deoarece vecinătățile U și V sînt înlocuite cu *vecinătățile simetrice* $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ și $|x - x_0| < \eta(\varepsilon)$, respectiv.

2) Numărul η depinde de ε, din care cauză scriem $\eta(\varepsilon)$, după cum și vecinătatea V depinde de U.

3) O imagine geometrică a definiției II este cea din figura 35.

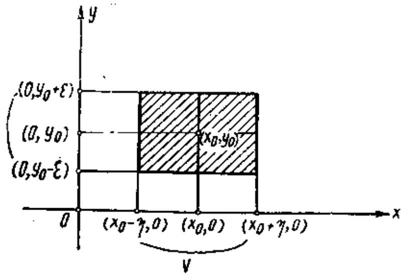


Fig. 35

Dacă luăm pe axa Oy intervalul $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ fiind dat, putem găsi un interval pe axa Ox $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ cu $\eta > 0$, astfel încît pentru orice $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ să existe $y = f(x)$ cu $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, adică punctul $M(x, y)$ să se găsească în dreptunghiul hașurat, de laturi 2ε și 2η, cu centrul în punctul (x_0, y_0).

Exemple

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_0}$, $x_0 \neq 0$.

2) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$. În acest exemplu se dă $\varepsilon = \dfrac{1}{10\,000}$ și trebuie găsit $\eta(\varepsilon)$. Avem

$$|\sqrt{x} - 1| < \frac{1}{10\,000}, \; 1 - \frac{1}{10\,000} < \sqrt{x} < 1 + \frac{1}{10\,000}$$

sau

$$\frac{(10^4-1)^2}{10^8} < x < \frac{(10^4+1)^2}{10^8}$$

$$\frac{(10^4-1)^2}{10^8} - 1 < x - 1 < \frac{(10^4+1)^2}{10^8} - 1,$$

deci trebuie să avem

$$|x-1| < \frac{2.10^4-1}{10^8} = \frac{\frac{2}{\varepsilon}-1}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \varepsilon(2-\varepsilon) = \eta(\varepsilon).$$

Pentru cazul cînd unul sau amîndouă numerele x_0 şi y_0 nu sînt finite, avem următoarele definiţii :

1) Funcţia $f(x)$ are limită $+\infty$ în punctul x_0 finit dacă pentru orice număr A există un număr $\eta(A) > 0$ astfel încît să avem

$$f(x) > A$$

dacă

$$|x - x_0| < \eta(A)$$

şi se scrie

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$

Exemplu

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Punctul $(x, f(x))$ se găseşte în domeniul haşurat, (fig. 36)

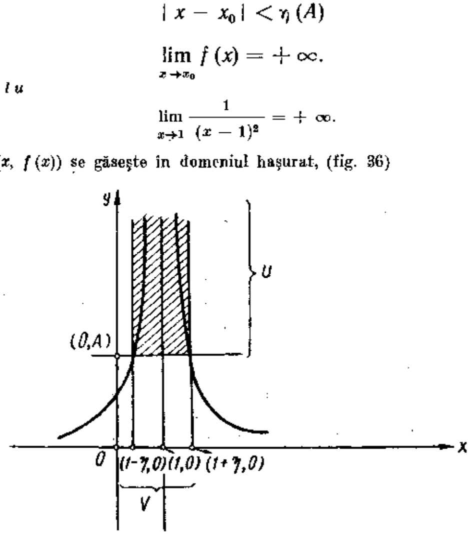


Fig. 36

2) Funcţia $f(x)$ are limita $-\infty$ în punctul x_0 dacă pentru orice număr A există un număr $\eta(A) > 0$ astfel încît să avem

$$f(x) < A$$

dacă

$$|x - x_0| < \eta(A)$$

și se scrie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Exemplu

$$\lim_{x \to \pi} \ln(1 + \cos x) = -\infty.$$

Punctul $(x, \ln(1 + \sin x))$ se găsește în domeniul hașurat, (fig. 37).

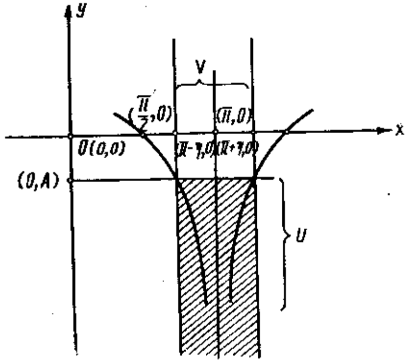


Fig. 37

3) Funcția $y = f(x)$ are limita $+\infty$ cînd $x \to +\infty$ dacă pentru orice număr A există un număr $B(A)$ astfel încît să avem

$$f(x) > A$$

dacă

$$x > B(A)$$

și se scrie

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exemplu

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty.$$

Punctul $(x, 2^x)$, $x > B(A)$, $f(x) > A$, se găsește în domeniul hașurat, (fig. 38).

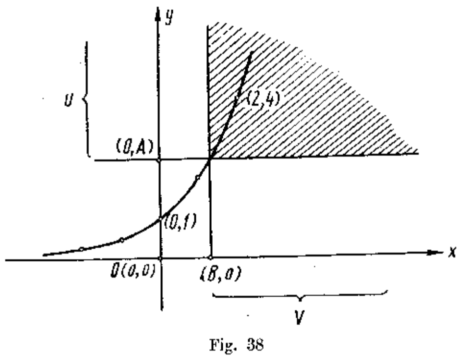


Fig. 38

4) Funcția $f(x)$ are limita $-\infty$ cînd $x \to +\infty$ dacă pentru orice număr A există un număr $B(A)$ astfel încît să avem

$$f(x) < A$$

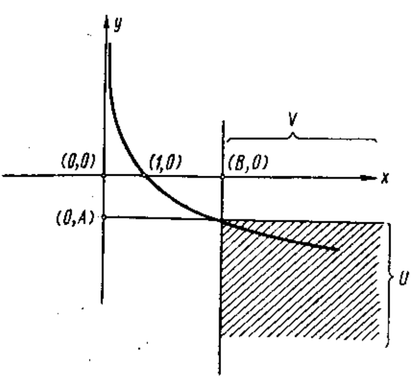


Fig. 39

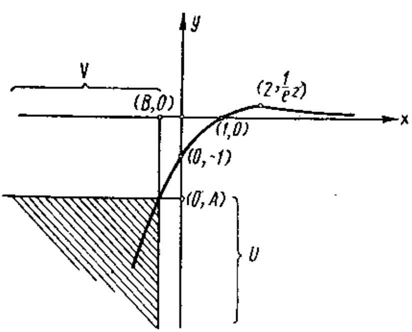


Fig. 40

dacă

$$x > B(A)$$

și se scrie

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemplu

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x} = -\infty.$$

În acest exemplu, $B(A) = e^{A}$, (fig. 39).

5) Funcția $f(x)$ are limita $+\infty$ cînd $x\to-\infty$ dacă pentru orice număr A există un număr $B(A)$ astfel încît să avem

$$f(x) > A$$

dacă

$$x < B(A)$$

și se scrie

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Exemplu

$$\lim_{x\to-\infty} a^{-x} = +\infty, \text{ dacă } a > 1.$$

6) Funcția $f(x)$ are limita $-\infty$ cînd $x\to-\infty$ dacă pentru orice număr A există un număr $B(A)$ astfel încît să avem

$$f(x) < A$$

dacă

$$x < B(A)$$

și se scrie

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemplu

$$\lim_{x\to-\infty} (x-1)\,e^{-x} = -\infty.$$

În regiunea hașurată $f(x) < A$, $x < B(A)$, (fig. 40).

7) Funcția $f(x)$ are limita y_0 (finită) cînd $x\to+\infty$ dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $B(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon$$

dacă

$$x > B(\varepsilon)$$

și se scrie

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0.$$

Exemplu

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^2+1} = 0.$$

În domeniul hașurat $|f(x)| < \varepsilon$, $x > B(\varepsilon)$, (fig. 41).

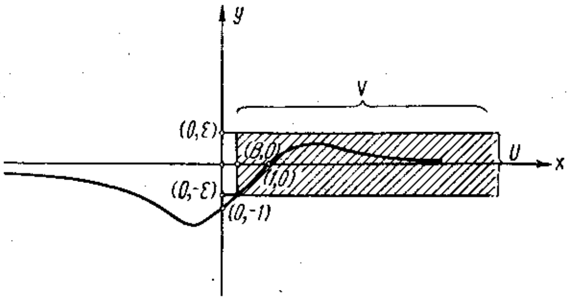


Fig. 41

8) Funcția $f(x)$ are limita y_0 cînd $x \to -\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $B(\varepsilon)$ astfel încît să avem

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon$$

dacă

$$x < B(\varepsilon)$$

și se scrie

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$

Exemplu

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Observație

Șirurile numerice sînt funcții cu domeniul de definiție mulțimea numerelor naturale N.

Definițiile 3, 4, 7 cuprind drept cazuri particulare limitele de șiruri, și anume 3 și 4 cînd șirurile sînt divergente și 7 cînd șirurile sînt convergente.

Definiția III. Se spune că funcția $f: X \to R$ are limita y_0 (finită sau infinită) în punctul x_0 (punct de acumulare al lui X) dacă pentru orice șir (x_n) convergent către x_0 ($x_n \in X$, $x_n \neq x_0$) șirul valorilor $(f(x_n))$ este convergent către y_0.

Definiția dată se numește *definiția limitei cu șiruri*.

Să arătăm că definiția cu ajutorul șirurilor este echivalentă cu definiția I cu ajutorul vecinătăților.

Să presupunem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, deci pentru orice vecinătate U a lui y_0 există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, dacă $x \in V, f(x) \in U$; șirul (oarecare) (x_n) fiind convergent către x_0, și $x_n \in X$ există un număr N astfel încît, pentru $n > N$, $x_n \in V \cap X$, deci $f(x_n) \in U$ pentru $n > N$, adică $f(x_n) \to y_0$.

Reciproc, să presupunem că pentru toate șirurile $x_n \to x_0$ ($x_n \in X$, $x_n \neq x_0$) șirurile corespunzătoare ale valorilor $f(x_n)$ au limita comună y_0 și să presupunem prin absurd y_0 nu este limita funcției în punctul x_0; aceasta înseamnă că există o vecinătate U_0 a lui y_0 cu proprietatea că, oricare ar fi vecinătatea V a lui x_0, există un punct $\xi \neq x_0$, $\xi \in V \cap X$, astfel încît $f(\xi) \notin U_0$. Să luăm un șir de vecinătăți (V_n) de forma

$$V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right),\quad n \in N,\quad x_0 \text{ finit.}$$

În fiecare vecinătate V_n există $\xi_n \in V_n \cap X$ astfel încît $f(\xi_n) \notin U_0$. Însă șirul

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n, \ldots$$

este convergent către x_0, deoarece $|\xi_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Conform ipotezei $f(\xi_n) \to y_0$, deci în vecinătatea lui U_0 se găsesc toți termenii șirului $f(\xi_n)$, cu excepția unui număr finit, ceea ce este în contradicție cu $f(\xi_n) \notin U_0$, pentru orice $n > N$. Prin urmare, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Observații

1) Dacă x_0 nu este finit se ia

$$V_n = (n,\ +\infty),\ \text{dacă}\ x_0 = +\infty,$$

sau

$$V_n = (-\infty,\ -n),\ \text{dacă}\ x_0 = -\infty,$$

și raționamentul se continuă în același mod; neegalitățile $|\xi_n - x_0| < \frac{1}{n}$ se transformă în $\xi_n > n$ sau $\xi_n < -n$, respectiv.

2) Dacă cel puțin pentru un șir $x_n \to x_0$ ($x_n \in X$, $x_n \neq x_0$) șirul valorilor $f(x_n)$ nu are limită, rezultă că funcția $f(x)$ nu are limita în punctul x_0.

3) Dacă pentru două șiruri $x'_n \to x_0$, $x''_n \to x_0$ (x'', $x'_n \in X$, x''_n, $x'_n \neq x_0$) limitele șirurilor $f(x_n)$ și $f(x''_n)$ există, însă sînt diferite, spunem că funcția $f(x)$ nu are limita în punctul x_0.

Exemple

1) Funcția $\sin \frac{1}{x}$ nu are limita în punctul $x_0 = 0$. Într-adevăr, pentru şirul $x_n' = \frac{1}{2n\pi}$, $n \in N$, şirul valorilor

$$f(x_n') = \sin (2n\pi)$$

este

$$0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots,$$

deci are limita zero, în timp ce pentru şirul $x_n'' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in N$, şirul valorilor

$$f(x_n'') = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

este

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots,$$

deci are limita numărul 1.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$, $x_0 \in (0, \infty)$, $\alpha \in R$.

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$, $x_0 \in (0, \infty)$.

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

5) Funcția $2^{\frac{1}{x-1}}$ nu are limită în punctul $x_0 = 1$.

Pentru şirul $x_n' = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in N$, convergent către 1, şirul valorilor 2^n este convergent către $+\infty$; pentru şirul $x_n'' = 1 - \frac{1}{n}$, convergent către 1, şirul valorilor 2^{-n} este convergent către zero.

2. Limita la stînga

Definiția I. Se spune că funcția $f : X \to R$ are în punctul x_0 (punct de acumulare al mulțimii X) limita la stînga y_s dacă pentru orice vecinătate U a lui y_s există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, oricare ar fi $x < x_0$, $x \in V \cap X$, să avem $f(x) \in U$; se notează

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0) = y_s.$$

Definiția II. Se spune că funcția $f : X \to R$ are în punctul x_0 limita la stînga y_s dacă la orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x) - y_s| < \varepsilon$$

dacă

$$0 < x_0 - x < \eta(\varepsilon), \quad x \in X, \quad x \neq x_0.$$

D e f i n i ț i a III. Se spune că funcția $f: X \to R$ are în punctul x_0 limita la stînga y_s dacă pentru orice șir crescător x_n, convergent către x_0 ($x_n \in X$, $x_n < x_0$), șirul corespunzător al valorilor $f(x_n)$ este convergent către y_s.

O b s e r v a ț i i

1) Pentru ca problema determinării limitei la stînga într-un punct x_0 să se poată pune, trebuie să existe șiruri $x_n < x_0$ convergente către x_0, cu $x_n \in X$.

2) Cele trei definiții date sînt echivalente.

E x e m p l e

1) Limita la stînga a funcției $\ln x$ în punctul $x_0 = 0$ nu are sens, deoarece funcția nu este definită pentru $x \leqslant 0$.

$$2) \lim_{x \to 0-} a^{\frac{1}{x}} = 0, \text{ dacă } a > 1;$$

$$\lim_{x \to 0-} a^{\frac{1}{x}} = +\infty, \text{ dacă } 0 < a < 1.$$

3. Limita la dreapta

D e f i n i ț i a I. Se spune că funcția $f: X \to R$ are în punctul x_0 (punct de acumulare al mulțimii X) limita la dreapta y_d dacă pentru orice vecinătate U a lui y_d există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît, oricare ar fi $x > x_0$, $x \in V \cap X$, să avem $f(x) \in U$; se notează

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0 + 0) = y_d.$$

D e f i n i ț i a II. Se spune că funcția $f: X \to R$ are în punctul x_0 limita la dreapta y_d dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x) - y_d| < \varepsilon$$

dacă

$$0 < x - x_0 < \eta(\varepsilon), \quad x \in X, \; x \neq x_0.$$

D e f i n i ț i a III. Se spune că funcția $f: X \to R$ are în punctul x_0 limita la dreapta y_d dacă pentru orice șir descrescător x_n, convergent către x_0 ($x_n \in X$, $x_n > x_0$), șirul corespunzător al valorilor $f(x_n)$ este convergent către y_d.

O b s e r v a ț i e

Dacă o funcție $f: X \to R$ are limită în punctul x_0, urmează că limitele la dreapta și la stînga (limitele laterale) sînt egale, adică

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Exemple

1) Funcția $f(x) = \dfrac{\sin \dfrac{1}{x}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

are limita la dreapta, însă nu are limită în punctul $x_0 = 0$.

$$\text{Avem } \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin \dfrac{1}{x}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0;$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin \dfrac{1}{x}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0-} \sin \frac{1}{x}, \text{ care nu există.}$$

2) $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{|x|}{x} = -1$, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{|x|}{x} = +1$, (fig. 42).

3) $\lim\limits_{x \to 1-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 1+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, (fig. 43).

4) Funcția lui Dirichlet definită pe R prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

nu are limite laterale în nici un punct.

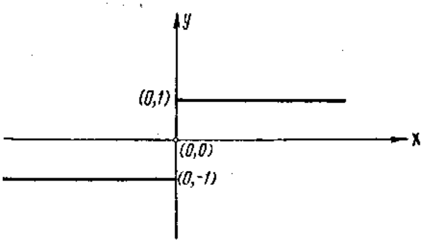


Fig. 42

În legătură cu funcțiile monotone avem următoarea

Teoremă. O funcție monotonă $f : X \to R$ are limite laterale în orice punct de acumulare al mulțimii X.

Demonstrație. Presupunem pe f crescătoare pe X și x_0 un punct de acumulare al lui X, astfel încît există șiruri $x_n < x_0$ convergente către x_0. Șirurile x_n fiind crescătoare, șirul valorilor $f(x_n)$ este de asemenea crescător; dacă este mărginit, are o limită y_s, iar dacă este nemărginit, are limita $+\infty$.

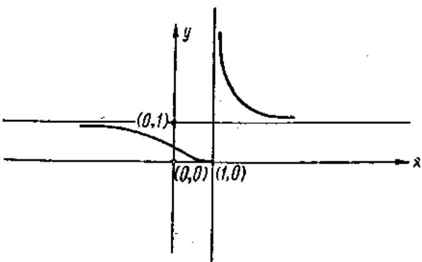


Fig. 43

Exemple

1) Funcția $\ln x$ este crescătoare pe $(0, \infty)$ deci are limită la dreapta în punctul 0 și la stînga în punctul $+\infty$

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty \ ; \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty.$$

2) Funcția a^x, $0 < a < 1$, este descrescătoare pe $(-\infty, +\infty)$, deci are limită în punctele $-\infty$ și $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$

4. Proprietățile limitelor de funcții

Am văzut că putem defini limita unei funcții cu ajutorul limitei de șiruri (definiția III). Din această cauză, o parte din proprietățile limitelor de șiruri sînt valabile și pentru limite de funcții.

Fie x_0 un punct de acumulare al lui X și f, g două funcții definite pe aceeași mulțime X, care au limite în punctul x_0 (finite sau infinite).

1) Dacă suma limitelor are sens, funcția $f+g$ are limită în punctul x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Fac excepție cazurile

$$a)\ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty;$$

$$b)\ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$$

În general, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au limita în punctul x_0 și dacă suma limitelor are sens, atunci

$$\lim_{x\to x_0} \left(\sum_{k=1}^{n} (f_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_k(x).$$

2) Dacă diferența limitelor are sens, funcția $f-g$ are limită în punctul x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Fac excepție cazurile

$$a)\ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty;$$

$$b)\ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty.$$

3) Dacă produsul limitelor are sens, funcția $f.g$ are limita în punctul x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to \infty x_0} g(x).$$

Fac excepție cazurile

$$a)\ \lim_{x\to x_0} f(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to x_0} |g(x)|=+\infty,$$

$$b)\ \lim_{x\to x_0} |f(x)|=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=0.$$

În general, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au limită în punctul x_0 și dacă produsul limitelor are sens, atunci

$$\lim_{x\to x_0} \prod_{i=1}^{n} f_i(x)=\prod_{i=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_i(x).$$

În particular

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^n=(\lim_{x\to x_0} f(x))^n, \quad n\in N.$$

4) Dacă cîtul limitelor are sens, funcția $\frac{f}{g}$ are limita în punctul x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Fac excepție cazurile

$$a)\ \lim_{x\to x_0} g(x)=0;$$

$$b)\ \lim_{x\to x_0} |f(x)|=+\infty, \quad \lim_{x\to x_0} |g(x)|=+\infty.$$

Observație

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ și $f(x)>0$ pentru $x\neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, iar dacă $f(x)<0$ pentru $x\neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

5) Funcția f^g are limita în punctul x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)^{g(x)})=\lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$$

cu excepția cazurilor

$$a)\ \lim_{x\to x_0} f(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=0;$$

$$b)\ \lim_{x\to x_0} f(x)=1 \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty;$$

$$c)\ \lim_{x\to x_0} |f(x)|=\infty \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=0.$$

6) Dacă funcția f are limita în punctul x_0 și dacă există o vecinătate $\overline{V}$ a punctului x_0 astfel încît să avem $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in X \cap V$, $x \neq x_0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$.

Exemplu

Funcția $\ln(2 + \cos x)$ în vecinătatea lui π este pozitivă

$$\ln(2 + \cos x) > 0, \quad x \neq \pi, \quad \lim_{x \to \pi} \ln(2 + \cos x) = 0.$$

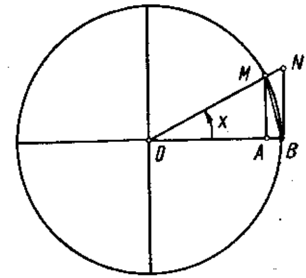


Fig. 44

7) Dacă funcțiile g și h definite pe X au limite egale în x_0 și dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru orice $x \in X \cap V$, $x \neq x_0$, să avem

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

atunci

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x).$$

Exemplu

Pentru $x < \frac{\pi}{2}$, avem din figura 44

aria tr. $OBM <$ aria seg. $OBM <$ aria tr. ON,

aria tr. $OBM = \frac{R^2}{2} \sin x$, aria seg. $OBM = \frac{R^2}{2} x$, aria tr. $OBN = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$,

deci

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Împărțind cu $\sin x > 0$, deoarece $x > 0$, avem

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ sau } \cos x > \frac{\sin x}{x} > 1,$$

însă $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, de unde

$$1 \geqslant \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} \geqslant 1.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$; schimbînd pe x în $-x$, raportul $\frac{\sin x}{x}$ nu se schimbă, deci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

8) **Teoremă.** **Fie $u: X \to Y$ și $f: Y \to R$ și funcția compusă**

$$f(u(x)), \quad x \in X.$$

Fie x_0 un punct de acumulare al mulțimii X și $u(x_0) = u_0$ un punct de acumulare al mulțimii Y.

Dacă $\lim_{x \to x_0} u(x) = u_0$, **dacă** $u(x) \neq u_0$ **pentru** $x \neq x_0$ **și dacă** $\lim_{u \to u_0} f(u) = y_0$, **atunci funcția compusă** $f(g(x))$, $x \in X$, **are limită în punctul** x_0 **și**

$$\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = y_0.$$

Demonstrație. Funcția $u(x)$ avînd limita u_0 în punctul x_0, urmează că pentru orice șir x_n convergent către x_0 șirul

$$u(x_1),\ u(x_2),\ \ldots,\ u(x_n),\ \ldots$$

este convergent către u_0. Funcția $f(u)$ avînd limita y_0 în punctul u_0, urmează că șirul valorilor

$$f(u(x_1)),\ f(u(x_2)),\ \ldots,\ f(u(x_n)),\ \ldots$$

este convergent către y_0, de unde

$$\lim_{x_n \to x_0} f(u(x_n)) = y_0.$$

Exemple

1) $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$; într-adevăr

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0| \cdot \left|\cos\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}\right|,$$

însă

$$\lim_{x \to x_0} \cos\frac{x - x_0}{2} = 1, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = 1,$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} |\sin x - \sin x_0| = \lim_{x \to x_0} |x - x_0| = 0.$$

2) $\lim_{x \to x_0} \ln(x + \sin x) = \ln(x_0 + \sin x_0)$, $\quad x_0 > 0$.

Funcția $\ln(x + \sin x)$ este o funcție compusă $f(u(x))$; funcția $u(x) = x + \sin x$ are limita pentru orice x_0, însă $f(u)$ nu este definită decît pentru $u > 0$, deci pentru $x > 0$ avem

$$\lim_{x \to x_0} \ln(x + \sin x) = \ln(x_0 + \sin x_0), \quad x_0 > 0.$$

3) Să se discute

$\lim_{x \to \infty} R(x) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$. Avem, dacă $b_0 \neq 0$,

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$$

a) dacă $m = n$, $\lim_{x \to \infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0}$;

b) dacă $m > n$, $\lim_{x \to \infty} R(x) = 0$;

c) dacă $m < n$, $\lim_{x \to \infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0}(+\infty)$.

4) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty, \quad a > 0$.

Deoarece $e^x > x$, numărul e fiind mai mare decît 2, putem scrie

$$\frac{e^x}{x^a} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2a}}\right)^{2a}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2a}} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2a}}}{\sqrt{x}}\right)^{2a} > \left(\frac{1}{2a}\sqrt{x}\right)^{2a} \to \infty, \text{ cînd } x \to \infty$$

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad a > 0$.

Din $e^x > x$ rezultă $x > \ln x$, deci putem scrie

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{\ln (x^{\frac{a}{2}})^{\frac{2}{a}}}{x^a} = \frac{2}{a}\, \frac{\ln x^{\frac{a}{2}}}{x^a} < \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{x^{\frac{a}{2}}} \to 0, \text{ cînd } x \to \infty.$$

Pentru şiruri avem criteriul lui Cauchy, care ne asigură convergenţa unui şir fără să cunoaştem limita şirului. Definiţia limitei unei funcţii cu ajutorul şirurilor ne îngăduie să transpunem acest criteriu şi la funcţii, şi anume

Criteriul lui Cauchy-Bolzano. Fie $f : X \to R$ şi x_0 un punct de acumulare al lui X. Funcţia f are limită finită în punctul x_0 dacă şi numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru orice pereche de puncte $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, din $V \cap X$ să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Să presupunem că $f(x) \to y_0$ cînd $x \to x_0$. Prin urmare, la orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice x', x'' din intervalul $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ să avem

$$|f(x') - y_0| < \varepsilon \quad , \quad |f(x'') - y_0| < \varepsilon.$$

Însă

$$f(x') - y_0 + y_0 - f(x'') = f(x') - f(x''),$$

deci

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - y_0| + |f(x'') - y_0| < 2\varepsilon.$$

Am luat pentru V intervalul $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$.

Reciproc, fie un şir $x_n \to x_0$ ($x_n \in X$, $x_n \neq x_0$) și un număr $\varepsilon > 0$. Conform ipotezei, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru x', $x'' \neq x_0$ și aparținînd lui $V \cap X$ să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Şirul x_n fiind convergent către x_0, pentru $n > N$, $x_n \in V \cap X$, deci pentru orice n, $m > N$, avem

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Prin urmare, șirul $f(x_n)$ are o limită finită, independentă de şirul x_n, care este, de altfel, arbitrar. Urmează că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ există.

Exemplu

Funcția $f(x) = x^a \sin \frac{1}{x}$, a natural, are limită cînd $x \to 0$. Avem

$$|f(x') - f(x'')| = \left| x'^a \sin \frac{1}{x'} - x''^a \sin \frac{1}{x''} \right| < |x'^a| + |x''^a|$$

dacă $|x'| < \eta$, $|x''| < \eta$

$$|f(x') - f(x'')| < 2\eta^a,$$

deci cînd $\eta \to 0$ (adică $x' \to 0$, $x'' \to 0$) și $f(x) \to 0$; prin urmare, funcția $x^a \sin \frac{1}{x}$ are limită cînd $x \to 0$.

5. Infiniți mici

Definiție. Fie $f: X \to R$ și x_0 un punct de acumulare al lui X. Se spune că $f(x)$ este infinit mic pentru $x = x_0$ dacă

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Funcția $f(x) = x - x_0$ este de asemenea un infinit mic pentru $x = x_0$ și se numește *infinit mic principal*, deoarece servește ca funcție de comparație pentru compararea infiniților mici.

Definiție. Se spune că $f(x)$ este infinit mic de ordinul α (α număr real și pozitiv) pentru $x - x_0$ infinit mic principal dacă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^\alpha} = k \quad (k \neq 0 \text{ și finit}).$$

numărul real $\alpha > 0$ se numește ordinul infinitului mic $f(x)$ pentru $x - x_0$ infinit mic principal.

Să observăm că dacă ord $f(x) >$ ord $g(x)$ atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \text{sau} \quad \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$$

Într-adevăr, dacă ord $f(x) = \alpha$, ord $g(x) = \beta$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)}{(x-x_0)^\beta}\cdot\frac{(x-x_0)^\alpha}{g(x)}\cdot\frac{(x-x_0)^\beta}{(x-x_0)^\alpha}\right] = 0,$$

deoarece

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^\beta} = k', \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = k''$$

și $\beta > \alpha$.

Exemplu

$f(x) = \sin x$ are ordinul $\alpha = 1$ pentru x infinit mic principal, deoarece

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Definiție. Fie $f(x)$ un infinit mic de ordinul α pentru $x - x_0$ infinit mic principal, deci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = k \quad (k \neq 0 \text{ și finit}).$$

Funcția $k(x-x_0)^\alpha$ se numește partea principală a infinitului mic $f(x)$.

Definiție. Doi infiniți mici $f(x)$ și $g(x)$ pentru $x - x_0$ infinit mic principal se numesc infiniți mici echivalenți dacă au aceeași parte principală.

Se verifică ușor că pentru doi infiniți mici $f(x)$ și $g(x)$ echivalenți avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Într-adevăr, dacă $k(x-x_0)^\alpha$ este partea lor principală,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^\alpha}{g(x)} = \frac{k}{k} = 1.$$

Rezultă de aici că orice infinit mic este echivalent cu partea sa principală.

Teoremă. Fie $f(x)$ un infinit mic de ordinul α cu $x - x_0$ infinit mic principal. Funcția $f(x)$ se scrie ca suma a două funcții

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

unde $\varphi(x)$ este partea sa principală. deci infinit mic de ordinul α, și $\psi(x)$ infinit mic de ordin superior lui α.

Demonstrație. Din

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = k,$$

dacă punem

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} - k,$$

avem

$$f(x) = k(x-x_0)^\alpha + (x-x_0)^\alpha g(x),$$

deci

$$\varphi(x) \equiv g(x-x_0)^\alpha \quad \text{și} \quad \psi(x) \equiv (x-x_0)^\alpha g(x).$$

Ne rămîne să mai arătăm că ord $\psi(x) > \alpha$. Putem scrie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\psi(x)}{(x-x_0)^\alpha} = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} - k\right) = 0$$

și teorema este demonstrată.

Avem și următoarea

Teoremă. Limita raportului a doi infiniți mici nu se schimbă dacă îi înlocuim cu părțile lor principale.

Demonstrație. Fie $f(x)$ și $g(x)$ doi infiniți mici pentru $x - x_0$ infinit mic principal și $f_1(x)$, $g_1(x)$ părțile lor principale, deci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} = 1, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{g_1(x)} = 1.$$

Putem scrie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{g_1(x)}{g(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)}{g(x)} \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha x}{\beta x} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

3) Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, deci x este partea principală a infinitului mic $\ln(1+x)$. Prin urmare,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha.$$

O b s e r v a ţ i e

Dacă $x_0 = +\infty$ (sau $-\infty$), atunci se ia ca infinit mic principal $\frac{1}{x}$.

6. Infiniţi mari

D e f i n i ţ i e. Fie $f : X \to R$, x_0 un punct de acumulare al lui X.

Se spune că $f(x)$ este un infinit mare pentru $x = x_0$ dacă

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$$

Funcţia $\frac{1}{x - x_0}$ se numeşte infinit mare principal. Dacă $|f(x)| \to +\infty$ pentru $x \to x_0$, atunci $\frac{1}{f(x)} \to 0$ pentru $x \to x_0$, deci inversul unui infinit mare este un infinit mic. Această observaţie ne permite să transpunem toate definiţiile şi rezultatele de la infiniţii mici la infiniţii mari.

E x e m p l e

1) Funcţia e^x pentru x infinit mare principal are ordinul superior oricărui număr real $\alpha > 0$, deoarece

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

pentru orice număr α real şi pozitiv.

2) Funcţia $\ln x$ pentru x infinit mare principal are ordinul inferior oricărui număr real $\alpha > 0$, deoarece

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

pentru orice număr real $\alpha > 0$.

§ 3. FUNCŢII CONTINUE

1. Definiţii

D e f i n i ţ i a 1. Fie f o funcţie definită pe $X \subset R$ şi $x_0 \in X$. Se spune că funcţia f e s t e c o n t i n u ă în punctul x_0 dacă la orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ corespunde o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \in X \cap V$, $f(x) \in U$.

În problema continuității se cercetează comportarea funcției în vecinătatea unui punct x_0 față de valoarea funcției în punctul x_0; din această cauză, x_0 trebuie să aparțină domeniului de definiție X al funcției considerate.

Funcția este continuă dacă la valori ale variabilei x vecine de x_0 funcția ia valori oricît de apropiate dorim de valoarea funcției în punctul x_0.

Pentru ca să punem problema continuității într-un punct x_0 trebuie deci ca funcția să ia o valoare finită în punctul x_0.

Observații

1) O funcție reală de variabilă reală fiind definită pe $X \subset R$, urmează că problema continuității în punctele $+\infty$ sau $-\infty$ nu se poate pune.

2) Dacă o funcție ia valoare infinită într-un punct x_0 nu se pune problema continuității în punctul x_0.

3) Într-un punct izolat $x_0 \in X$ în care funcția $f(x)$ ia valoare finită, funcția este continuă, deoarece în definiția continuității nu se cere (ca la definiția limitei într-un punct) ca x_0 să fie punct de acumulare al lui X, iar condițiile din definiție sînt îndeplinite.

4) Vecinătatea V depinde de vecinătatea U.

Despre un punct x_0 în care funcția este continuă spunem că este un *punct de continuitate* pentru funcția f.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ este continuă în orice punct $x \in R$.

2) Funcția $f(x) = \ln(1+x)$ este continuă în orice punct $x > -1$. Nu are sens problema continuității în punctele $x \leqslant -1$, deoarece funcția $\ln(1+x)$ nu este definită pentru $x \leqslant -1$.

Definiția II. Fie $f: X \to R$ și $x_0 \in X$. Se spune că funcția $f(x)$ este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in X$, astfel încît

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon).$$

În această definiție (numită definiția cu ε), η depinde de ε.

Se observă că vecinătățile U și V din definiția I (definiția cu ajutorul vecinătăților) sînt în acest caz vecinătăți simetrice.

Exemplu

Funcția $\cos x$ este continuă în orice punct $x_0 \in R$.

Avem $|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\dfrac{x+x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right| \leqslant$

$$\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0|,$$

deci pentru $|x - x_0| < \varepsilon$, $|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$; aici $\eta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Definiția III. O funcție $f : X \to R$ este continuă în punctul $x_0 \in X$ dacă pentru orice șir x_n convergent către x_0 șirul valorilor $f(x_n)$ este convergent către $f(x_0)$.

Observație

Deoarece nu se cere $x_n \neq x_0$, dacă nu există $x_n \neq x_0$, se poate lua șirul constant $x_n = x_0$, $n \in N$, deci o funcție este continuă într-un punct izolat.

Exemple

1) Funcția x^n este continuă în orice punct $x \in R$.

Avem $x^n - x_0^n = (x - x_0)\ (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$, deci

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \quad , \quad x_0 \in R.$$

2) Funcția a^x este continuă pentru $x_0 \in R$, deoarece

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \quad , \quad x_0 \in R.$$

3) Funcția tg x nu este definită în punctele $x = (2k + 1)\ \frac{\pi}{2}$.

Pentru orice $x_0 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ avem

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 ,$$

deci tg x este continuă pentru $x \in R - \left\{(2k + 1)\ \frac{\pi}{2}\right\}$.

Observații

În definiția continuității nu se cere ca x_0 să fie punct de acumulare al mulțimii de definiție X. În cazul cînd $x_0 \in X$ este și punct de acumulare pentru X, continuitatea în punctul x_0 se poate defini cu ajutorul limitei în modul următor:

Definiția IV. O funcție $f : X \to R$ este continuă în punctul $x_0 \in X$ (x_0 punct de acumulare al lui X) dacă

1) limita la dreapta $f(x_0 + 0)$ în punctul x_0 există și este finită;

2) limita la stînga $f(x_0 - 0)$ în punctul x_0 există și este finită;

3) cele două limite sînt egale între ele și egale cu valoarea funcției în punctul x_0

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Pentru funcțiile definite pe intervale sau reuniuni de intervale închise, definiția IV este echivalentă cu oricare din definițiile I, II, III, deoarece pentru orice interval închis orice punct al intervalului este și punct de acumulare.

Definiție. O funcție $f : X \to R$ este continuă pe o mulțime $A \subset X$ dacă este continuă în fiecare punct al mulțimii A.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x \in R - \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

nu este continuă în punctul $x = 0$, deoarece

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0-} f(x) = 0.$$

2) Funcția rațională

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

este continuă pe tot domeniul de definiție. În punctele în care se anulează numitorul, funcția nu este definită, deci problema continuității nici nu se pune.

3) Funcția $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ este continuă pe tot domeniul de definiție. Funcția nu este definită în punctele $x = k\pi$. În aceste puncte, problema continuității nu se pune.

4) Funcția $\ln(1 + x)$ este continuă pentru $x > -1$. Pentru $x \leqslant -1$, funcția nu este definită, deci problema continuității nici nu se pune.

5) Funcția $\ln(1 + x^2)$ este continuă pe toată axa R.

2. Continuitatea la stînga

Definiția I. Fie $f: X \to R$ și $x_0 \in X$. Se spune că funcția f este continuă la stînga în punctul x_0 dacă la orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

dacă

$$0 < x_0 - x < \eta(\varepsilon), \quad x \in X.$$

În definiția continuității la stînga se cere deci ca $x \leqslant x_0$.

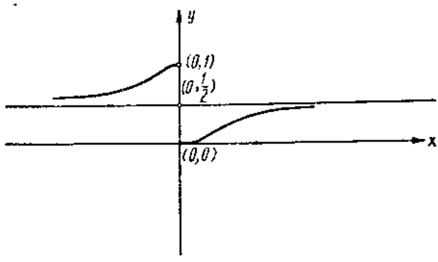


Fig. 45

Definiția II. Fie $f: X \to R$ și $x_0 \in X$. Se spune că funcția f este continuă la stînga în punctul x_0 dacă pentru orice șir x_n ($x_n \leqslant x_0$, $x_n \in X$) convergent către x_0 șirul valorilor $f(x_n)$ este convergent către $f(x_0)$.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, & x \in R - \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

este continuă la stînga în punctul $x = 0$. Într-adevăr (fig. 45),

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0-} f(x) = 1 = f(0).$$

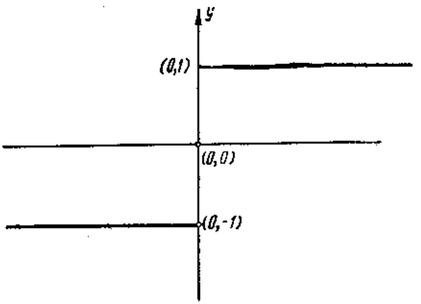


Fig. 46

2) Funcția

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \in R - \{0\} \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă la stînga în punctul $x = 0$, (fig. 46).

Dacă x_0 este punct de acumulare al mulțimii de definiție X, atunci putem defini continuitatea la stînga în punctul x_0 cu ajutorul limitei.

D e f i n i ț i a III. O funcție $f : X \to R$ este continuă la stînga în punctul $x_0 \in X$ (x_0 punct de acumulare al lui X) dacă:

1) limita la stînga $f(x_0 - 0)$ în punctul x_0 există și este finită;

2) limita la stînga este egală cu valoarea funcției în punctul x_0, adică

$$f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

3. Continuitatea la dreapta

D e f i n i ț i a I. Fie $f : X \to R$ și $x_0 \in X$. Se spune că funcția f este continuă la dreapta în punctul x_0 dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

dacă

$$0 < x - x_0 < \eta(\varepsilon), \qquad x \in X.$$

În problema continuității la dreapta, într-un punct x_0, se cercetează comportarea funcției în puncte x, situate la dreapta punctului x_0, față de valoarea funcției în punctul x_0, după cum în problema continuității la stînga în punctul x_0 se cercetează comportarea funcției în puncte x, situate la stînga punctului x_0, față de valoarea funcției în punctul x_0.

D e f i n i ț i a II. Fie $f : X \to R$ și $x_0 \in X$. Se spune că funcția f este continuă la dreapta în punctul x_0 dacă pentru orice șir x_n ($x_n \geq x_0$, $x_n \in X$) convergent către x_0 șirul valorilor $f(x_n)$ este convergent către $f(x_0)$.

Dacă $x_0 \in X$ este și punct de acumulare pentru X, atunci avem următoarea definiție cu ajutorul limitei la dreapta în x_0.

Definiția III. O funcție $f: X \to R$ este continuă la dreapta în punctul $x_0 \in X$ (x_0 punct de acumulare al lui X) dacă:

1) limita la dreapta în punctul x_0, $f(x_0+0)$, există și este finită;

2) limita la dreapta este egală cu valoarea funcției în punctul x_0, adică

$$f(x_0+0) = f(x_0).$$

Observații

1) Din definiție rezultă că o funcție continuă într-un punct este continuă la dreapta și la stînga în punctul respectiv; reciproc, dacă funcția este continuă la dreapta și la stînga într-un punct, este continuă în acel punct.

2) O funcție continuă într-un interval închis $[a, b]$ este continuă în fiecare punct al intervalului (a, b). În punctul a funcția este continuă și la dreapta, și la stînga. Continuitatea la dreapta poate fi formulată cu ajutorul limitei (definiția III); continuitatea la stînga nu se poate formula cu ajutorul limitei, deoarece funcția nu este definită pentru $x < a$, însă, folosind definiția II și luînd $x_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, rezultă și continuitatea la stînga. Discuție analogă și pentru b.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \begin{cases} x & , \; 0 \leqslant x < 1 \\ x-1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

este continuă pe $[0,2] - \{1\}$; în punctul $x = 1$, este continuă la dreapta, însă nu este continuă la stînga, (fig. 47).

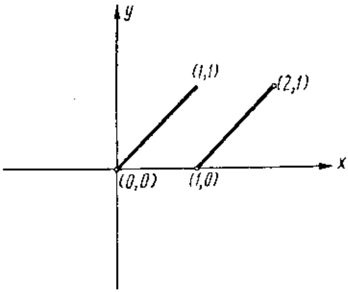


Fig. 47

2) Funcția $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \in R - \{0\} \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$

nu este continuă în punctul $x = 0$, deoarece funcția nu are limită în punctul $x = 0$.

3) Funcția $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \; k \text{ întreg} \\ 0 & , \; x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \; k \text{ întreg} \end{cases}$

nu este continuă în punctele $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, deoarece în aceste puncte *limitele laterale* sînt infinite. Limita la dreapta și limita la stînga se numesc și limite laterale, după cum continuitatea la dreapta sau continuitatea la stînga se numește și continuitate laterală.

4. Puncte de discontinuitate

Definiție. Fie $f: X \to R$. Dacă $x_0 \in X$ nu este punct de continuitate pentru f spunem că funcția f este discontinuă în punctul x_0, iar x_0 se numește punct de discontinuitate.

Deoarece o funcţie este continuă în punctele izolate ale lui X, urmează că un punct de discontinuitate este în mod necesar punct de acumulare al lui X. Rezultă că x_0 este punct de discontinuitate dacă una din cele trei condiţii care intervin în definiţia IV (B, cap. II, § 3, al. 1) nu este îndeplinită. Prin urmare $x_0 \in X$ este punct de discontinuitate dacă are loc una din următoarele situaţii :

1) $f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$;

2) $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$;

3) $f(x_0+0)$ sau $f(x_0-0)$ nu sînt finite;

4) $f(x_0+0)$ sau $f(x_0-0)$ nu există.

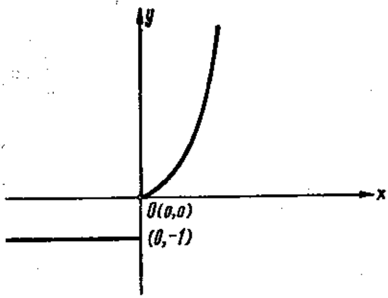


Fig. 48

Observaţie

Dacă x_0 nu aparţine domeniului de definiţie, problema discontinuităţii nu are sens.

Exemple

1) Funcţia $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

este discontinuă în punctul $x=0$, (fig. 48).

2) Funcţia $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x\in R-\{0\} \\ 1, & x=0 \end{cases}$

este discontinuă în origine, (fig. 49). Limitele laterale în punctul zero sînt egale, însă sînt infinite.

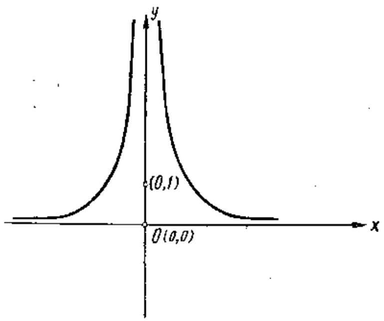


Fig. 49

Punctele de discontinuitate ale unei funcţii se împart în două categorii : puncte de discontinuitate de prima speţă şi puncte de discontinuitate de speţa a doua.

Definiţie. Fie x_0 un punct de discontinuitate pentru funcţia f. Dacă limitele laterale în punctul x_0 există şi sînt finite, se spune că x_0 este punct de discontinuitate de prima speţă.

Orice punct de discontinuitate care nu este de prima speţă se spune că este de speţa a doua, deci într-un punct de discontinuitate de speţa a doua cel puţin una din limitele laterale este infinită sau nu există.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \in R - \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

are punctul $x = 0$, punct de discontinuitate de prima speță, (fig. 50).

Avem $f(0 - 0) = -1$, $f(0 + 0) = 1$. Diferența $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se numește *saltul funcției* în punctul x_0. În cazul nostru, saltul funcției este 2.

2) Funcția $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

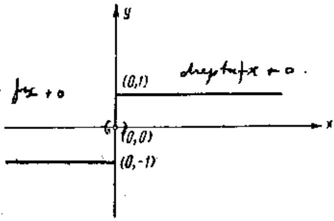


Fig. 50

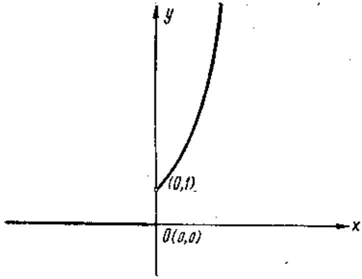


Fig. 51

are în punctul $x = 0$ o discontinuitate de prima speță, (fig. 51).

3) Funcția $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ 1, & x \in R - [-1, +1] \end{cases}$

are punctul $x = -1$, punct de discontinuitate de prima speță, (fig. 52).

4) Funcția $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

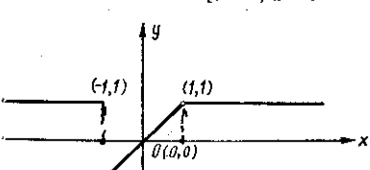


Fig. 52

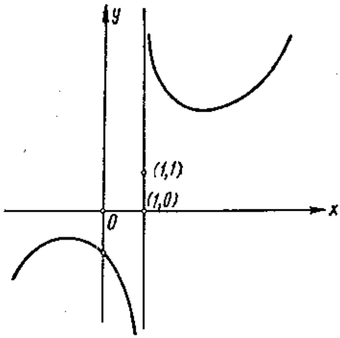


Fig. 53

are punctul $x = 0$, punct de discontinuitate de speța a doua, deoarece funcția $f(x)$ nu are limită în punctul $x = 0$.

5) Funcția $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}, & x \in R - \{1\} \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

are punctul $x = 1$, punct de discontinuitate de speța a doua, (fig. 53).

5. Discontinuitățile funcțiilor monotone

Teoremă. O funcție monotonă, definită pe un interval $[a,b]$, nu are decît puncte de discontinuitate de prima speță.

Demonstrație. Fie x_1, x_2, x_3 trei puncte ale intervalului $[a, b]$. Funcția f fiind definită pe intervalul $[a, b]$, urmează că $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ sînt finite. Presupunem că $x_1 < x_2 < x_3$. Să arătăm că $f(x_2 + 0)$ și $f(x_2 - 0)$ sînt finite. Dacă f este crescătoare, avem

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \text{ dacă } x_1 < x < x_2, \text{ și } f(x_2) \leqslant f(x) \leqslant f(x_3), \text{ dacă } x_2 < x < x_3.$$

unde prin trecere la limită

$$f(x_1) \leqslant \lim_{\substack{x \to x_2 \\ x < x_2}} f(x) \leqslant f(x_2) \quad \text{și} \quad f(x_2) \leqslant \lim_{\substack{x \to x_2 \\ x > x_2}} f(x) \leqslant f(x_3),$$

deci limitele la stînga și la dreapta în punctul x_2 (arbitrar) sînt finite.

În punctul a, funcția f nu are limita la stînga și în punctul b nu are limita la dreapta.

În cazul cînd f este descrescătoare, teorema se demonstrează în mod asemănător.

Teoremă. O funcție monotonă pe un interval I are cel mult o infinitate numărabilă de puncte de discontinuitate.

Demonstrație. Să presupunem că f este crescătoare pe intervalul $[a, b]$. În orice punct $x \in [a, b]$, $f(x + 0)$ și $f(x - 0)$ sînt mărginite.

Fie λ un număr pozitiv și $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ n puncte în care saltul funcției este egal sau superior lui λ

$$f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \geqslant \lambda, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Avem și

$$f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0) \geqslant 0.$$

Obținem, prin însumare,

$$f(x_1 - 0) - f(a) + f(x_2 - 0) - f(x_1 + 0) + f(x_2 - 0) - f(x_2 + 0) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_n - 0) - f(x_{n-1} + 0) + f(b) - f(x_n + 0) \geqslant n\lambda$$

$$n\lambda \leqslant f(b) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0)) -$$
$$-(f(x_n + 0) - f(x_1 - 0)).$$

Cum toți termenii din paranteză sînt pozitivi, rezultă că

$$n \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{\lambda},$$

deci numărul punctelor în care saltul funcției este superior numărului λ este finit sau zero.

Dacă S_1 este mulțimea punctelor pentru care saltul este > 1, S_1 este finită.

Dacă S_2 este mulțimea punctelor pentru care saltul este cuprins între $\frac{1}{2}$ și 1, mulțimea S_2 este finită ș.a.m.d.; dacă S_m este mulțimea punctelor pentru care saltul este cuprins între $\frac{1}{m}$ și $\frac{1}{m-1}$, mulțimea S_m este finită. Mulțimea S

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$$

este o reuniune numărabilă de mulțimi finite, deci S, care reprezintă mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției f pe intervalul $[a, b]$, este o mulțime numărabilă.

Am presupus în demonstrație că intervalul I este închis și mărginit. Dacă

1) $I = [a, b], \quad b \leqslant +\infty,$

putem scrie pe I ca reuniune numărabilă de intervale mărginite și închise

$$I = [a, \beta_1] \cup [\beta_1, \beta_2] \cup \ldots \cup [\beta_n, \beta_{n+1}] \cup \ldots,$$

șirul β_n fiind strict crescător, convergent către b (finit sau infinit).

2) $I = [a, b], \quad a \geqslant -\infty.$

Putem scrie pe I ca o reuniune numărabilă de intervale mărginite și închise

$$I = [\alpha_1, b] \cup [\alpha_2, \alpha_1] \cup \ldots \cup [\alpha_{n+1}, \alpha_n] \cup \ldots,$$

șirul α_n fiind strict descrescător, convergent către a.

3) $I = (a, b), \quad a \geqslant -\infty, \quad b \leqslant +\infty.$

Scriem

$$I = [\alpha_1, \beta_1] \cup [\beta_1, \beta_2] \cup [\alpha_2, \alpha_1] \cup \ldots \cup [\beta_n, \beta_{n+1}] \cup [\alpha_{n+1}, \alpha_n] \cup \ldots,$$

cu $\alpha_1 < \beta_1$, șirul α_n fiind strict descrescător, convergent către a, iar șirul β_n strict crescător, convergent către b.

În toate cazurile, mulțimile reunite sînt intervale mărginite și închise. În fiecare din intervalele ce intervin, funcția f avînd o infinitate numărabilă de puncte de discontinuitate, reuniunea lor este numărabilă.

§ 4. PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR CONTINUE

1. Operații cu funcții continue

Fie f și g două funcții definite pe aceeași mulțime X, $x_0 \in X$ un punct de continuitate pentru f și g.

Din definiția continuității cu ajutorul șirurilor avem următoarele propoziții:

1) Funcția $f + g$ este continuă în punctul x_0.

Într-adevăr, deoarece pentru orice șir x_n convergent către x_0 ($x_n \in X$) avem

$$f(x_n) \to f(x_0), \qquad g(x_n) \to g(x_0),$$

rezultă și $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$. În general, suma unui număr finit de funcții continue în x_0, $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, este o funcție continuă în x_0. În mod asemănător se arată că:

2) Funcția $f - g$ este continuă în punctul x_0.
3) Funcția fg este continuă în punctul x_0.

4) Dacă $g(x_0) \neq 0$, funcția $\frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in X$, este continuă în punctul x_0

2. Funcții compuse

Teoremă. Dacă $u : X \to Y$ și $f : Y \to R$, funcția u este continuă în punctul $x_0 \in X$ și f este continuă în punctul $u_0 = u(x_0) \in Y$, atunci funcția compusă $f(u(x))$, $x \in X$, este continuă în punctul x_0.

Demonstrație. Pentru orice șir $x_n \to x_0$ $(x_n \in X)$, șirul valorilor $u(x_n) = u_n \to u(x_0) = u_0$, deoarece funcția $u(x)$ este continuă în punctul x_0. Funcția $f(u)$ fiind continuă în punctul u_0, urmează că dacă $u_n \to u_0$ și $f(u_n) \to f(u_0)$, deci

$$f(u(x_n)) \to f(u(x_0)), \qquad x_n \in X.$$

3. Funcții inverse

Teoremă. Funcția inversă a unei funcții continue este o funcție continuă.

Demonstrație. Fie $f : X \to R$ o funcție strict crescătoare, continuă pe X, și $\overset{-1}{f}$ funcția inversă. Avem echivalența

$$x \to y = f(x) \Leftrightarrow y \to \overset{-1}{f}(y) = x.$$

Funcția $f(x)$ fiind continuă în $x_0 \in X$ pentru orice șir x_n convergent către x_0 $(x_n \in X)$, șirul valorilor $y_n = f(x_n)$ este convergent către $y_0 = f(x_0)$.

Fie acum un șir y_n strict crescător, convergent către $y_0 = f(x_0)$. Funcția f fiind biunivocă, șirului y_n îi corespunde șirul unic x'_n $(x'_n \in X)$.

Să arătăm că șirul x'_n este convergent către x_0. Șirul x'_n este strict crescător, deci are o limită $\xi \in X$. Deoarece f este continuă în interval, avem

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} f(x') = y_0 = f(x_0),$$

însă șirul x'_n este convergent către ξ, deci $f(x_0) = f(\xi)$ și, cum funcția f este biunivocă, $x_0 = \xi$. Se procedează în mod asemănător și pentru un șir y_n strict descrescător, convergent către y_0. Funcția $\overset{-1}{f}$ este deci continuă pe domeniul valorilor.

4. Proprietăți locale ale funcțiilor continue

Teoremă. Dacă f este continuă în punctul x_0 și dacă $f(x_0) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru orice $x \in V \cap X$ (X domeniul de definiție al lui f) avem $f(x) \cdot f(x_0) > 0$.

Demonstrație. Să presupunem $f(x_0) > 0$; vrem să găsim o vecinătate V a lui x_0 astfel încît dacă $x \in V \cap X$ valoarea $f(x)$ să aibă același semn cu $f(x_0)$. Din definiția continuității avem

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1}$$

dacă

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon).$$

Putem scrie pe (1) astfel:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + f(x_0). \tag{2}$$

Înmulțim în (2) cu $f(x_0) > 0$

$$f^2(x_0) - \varepsilon f(x_0) < f(x) \cdot f(x_0) < f^2(x_0) + \varepsilon f(x_0)$$

și luăm $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0$,

deci

$$0 < \frac{1}{2} f^2(x_0) < f(x) \cdot f(x_0) < \frac{3}{2} f^2(x_0).$$

Prin urmare,

$$f(x) \cdot f(x_0) > 0$$

dacă luăm pentru V intervalul $(x_0 - \eta', x_0 + \eta')$, cu $\eta'(\varepsilon)$ corespunzător lui $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$.

Dacă $f(x_0) < 0$, sensul neegalităților (2) se schimbă și se ia $\varepsilon = \frac{1}{2} |f(x_0)|$.

Din demonstrația teoremei de mai sus rezultă și următoarea

Teoremă. Dacă f este continuă în punctul x_0, există o vecinătate a punctului x_0 pe care f este mărginită.

5. Prelungirea prin continuitate a unei funcții

Fie $f : X \to R$ și x_0 un punct de acumulare al lui X $(x_0 \notin X)$ în care funcția f are o *limită finită* y_0. Funcția f *nu este definită* în punctul x_0, deci nu se poate vorbi de continuitate sau de discontinuitate în acest punct.

Definiție. Funcția $\bar{f} : X \to R$ definită în modul următor

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \neq x_0, \quad x \in X \\ y_0, & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$$

se numește prelungirea funcției f prin continuitate în punctul x_0; se verifică imediat că $\bar{f}$ este continuă în punctul x_0, deoarece

$$\lim_{x \to x_0} \bar{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 = \bar{f}(x_0).$$

Exemple

1) Funcția $f(x) = x^a \sin \frac{1}{x}$, a natural, definită pe $R - \{0\}$ are limită în punctul $x = 0$, deoarece

$$\left| x^a \sin \frac{1}{x} \right| < |x|^a \text{ pentru } x \neq 0,$$

deci $\lim\limits_{x \to 0} x^a \sin \frac{1}{x} = 0$. Prelungirea prin continuitate în punctul 0 a funcției $f(x)$ este

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

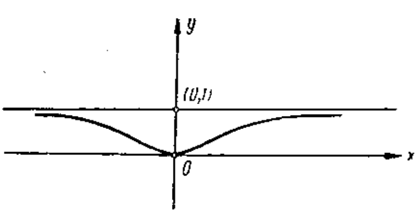


Fig. 54

2) Funcția $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ este definită pentru $x \in R - \{0\}$, iar în punctul $x = 0$ are limitele laterale egale cu 0 (fig. 54). Funcția f se poate prelungi prin continuitate în punctul 0, și anume

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3) Funcția $\operatorname{tg}^2 x$, $x = [0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ nu se poate prelungi prin continuitate în punctele $\frac{\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2}$, deoarece în aceste puncte limitele laterale sînt infinite.

4) Funcția $\sin \frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$ nu se poate prelungi prin continuitate în origine, deoarece nu are limită cînd $x \to 0$.

5) Funcția $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ definită pe $R - \{0\}$ are limitele laterale egale și finite în punctul $x = 0$, anume

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2},$$

deci se poate prelungi prin continuitate în origine prin

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

6. Proprietățile funcțiilor continue pe un interval închis și mărginit (compact)

T e o r e m a I. O funcție continuă pe un interval închis și mărginit $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie $f: [a, b] \to R$ continuă pe $[a, b]$. Dacă f este mărginită, urmează că trebuie să avem

$$|f(x)| \leqslant M, \qquad x \in [a, b].$$

Să presupunem că $f(x)$ *nu* este mărginită. Asta înseamnă că pentru orice număr $M > 0$ există un punct $\xi_M \in [a, b]$ astfel încît

$$|f(\xi_M)| > M.$$

Dacă luăm $M = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, urmează că pentru orice $n \in N$ există $\xi_n \in [a, b]$ astfel încît

$$|f(\xi_n)| > n. \tag{1}$$

Intervalul $[a, b]$ fiind închis și mărginit, din șirul mărginit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, conform lemei lui Cesàro, se poate extrage un subșir $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots, \xi_{n_p}, \ldots$ convergent către $\xi \in [a, b]$. Funcția, fiind continuă pe $[a, b]$, este continuă și în punctul ξ, deci

$$f(\xi_p) \to f(\xi)$$

sau

$$|f(\xi)| - \varepsilon < |f(\xi_{n_p})| < |f(\xi)| + \varepsilon, \text{ dacă } n_p > N(\varepsilon).$$

Din inegalitățile (1) rezultă că

$$|f(\xi_{n_p})| > n_p \to \infty,$$

deoarece $n_p \to \infty$ cînd $p \to \infty$, ceea ce duce la o contradicție, deoarece ε este fix și $f(\xi)$ este finit. Teorema este demonstrată.

O b s e r v a ț i i

1) Dacă condițiile din teoremă nu sînt îndeplinite, proprietatea poate să nu aibă loc. Funcția $\frac{1}{x}$ este continuă pe $(0,1]$, însă nu este mărginită pe $(0,1]$, deoarece, oricare ar fi $M > 0$, pentru $x < \frac{1}{M} \in (0,1]$, $f(x) = \frac{1}{x} > M$, (fig. 55).

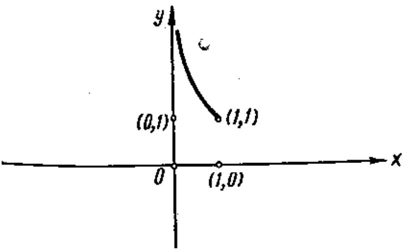


Fig. 55

2) Teorema 1 rămîne adevărată și pe mulțimi compacte oarecare de numere reale și se demonstrează în mod asemănător.

T e o r e m a 2. O funcție continuă pe un interval închis și mărginit $[a, b]$ își atinge marginile pe $[a, b]$.

Demonstrație. Am văzut că $f(x)$ continuă pe $[a, b]$ este mărginită, deci există două numere m și M astfel încît

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

unde m, este marginea inferioară și M marginea superioară a funcției f pe $[a, b]$. Să arătăm acum că există un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încît $f(\xi) = m$ și un punct $\xi' \in [a, b]$ cu $f(\xi') = M$.

Să presupunem că nu există punctul ξ pentru care avem $f(\xi) = m$.

Din definiția dată marginii inferioare, funcția $\varphi(x) = f(x) - m$, $x \in [a, b]$ este continuă și strict pozitivă pe $[a, b]$, deci și funcția

$$F(x) = \frac{1}{f(x) - m}$$

este continuă și pozitivă pe $[a, b]$, deci, conform teoremei precedente, $F(x)$ este mărginită

$$\frac{1}{f(x) - m} \leqslant M_1 > 0$$

sau

$$f(x) \geqslant m + M_1$$

și m nu ar mai fi marginea inferioară a funcției f pe $[a, b]$. Ipoteza făcută ne-a dus la o contradicție; deci există un punct ξ pentru care $f(\xi') = m$.

Existența lui ξ' cu $f(\xi') = M$ se demonstrează în mod asemănător.

Observații

1) Dacă condițiile din teoremă nu sînt îndeplinite se poate ca proprietatea să nu aibă loc. Funcția $f(x) = x^2$, $x \in (0, 1]$ este mărginită pe $(0, 1]$, însă nu își atinge marginea inferioară $m = 0$, deoarece intervalul nu este închis.

2) Diferența $M - m$ se numește oscilația funcției f în intervalul $[a, b]$. Pentru orice subinterval $[a', b'] \subset [a, b]$ avem $M' - m' \leqslant M - m$.

3) Teorema 2 rămîne adevărată și pe mulțimi compacte oarecare de numere reale.

Teorema 3. Dacă o funcție continuă pe un interval închis și mărginit $[a, b]$ ia valori de semne contrare la capetele intervalului $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există cel puțin un punct $x_0 \in (a, b)$ astfel încît $f(x_0) = 0$.

Demonstrație. Fie $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ și $a_1 = \frac{a+b}{2}$ mijlocul lui (a, b). Dacă $f(a_1) = 0$, a_1 este punctul căutat. În caz contrar, unul din intervalele $[a, a_1]$, $[a_1, b]$ se bucură de aceeași proprietate; îl vom nota $[a_1, b_1]$, cu $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$; fie

$$a_2 = \frac{b_1 + a_1}{2}$$

mijlocul său. Sau $f(a_2) = 0$ și a_2 este punctul căutat, sau unul din intervalele $[a_1, a_2]$, $[a_2, b_1]$, pe care îl vom nota $[a_2, b_2]$, se bucură de proprietatea din enunț, adică $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$. Continuînd în acest mod, obținem un șir de intervale $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ cu

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$$

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$$

$$b_p > a_q, \; p, q \in N \text{ și } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

deci

$$\bigcap_{1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x_0\}, \qquad x_0 \in [a, b],$$

punctul x_0 fiind limita comună a celor două şiruri (a_n) şi (b_n); $x_0 \in [a, b]$, deoarece intervalul $[a, b]$ este compact.

Din modul cum au fost construite șirurile (a_n) și (b_n) avem și

$$f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0, \text{ pentru orice } n \in N.$$

Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, f fiind continuă, urmează că

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Dar $f(a_n) < 0$, deci $f(x_0) \leqslant 0$.

În mod asemănător $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = x_0$, de unde urmează că

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0),$$

însă $f(b_n) > 0$, de unde rezultă $f(x_0) \geqslant 0$; neegalitățile $f(x_0) \geqslant 0$, $f(x_0) \leqslant 0$ conduc la $f(x_0) = 0$ și teorema este demonstrată.

Teorema 3 servește pentru separarea rădăcinilor unei ecuații.

O consecință a teoremei 3 este următoarea

Teoremă. O funcție continuă într-un interval închis și mărginit $[a, b]$ ia cel puțin o dată toate valorile cuprinse între marginea sa superioară M și marginea sa inferioară m.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $m < \alpha < M$, funcția

$$g(x) = f(x) - \alpha$$

este continuă pe intervalul închis $[a, b]$, dacă $f(x)$ este continuă; dacă ξ' și ξ'' sînt punctele pentru care

$$f(\xi') = m, \qquad f(\xi'') = M,$$

avem

$$g(\xi') < 0, \qquad g(\xi'') > 0,$$

deci există un punct

$$x_0 \in [\xi', \xi''] \subset [a, b]$$

astfel încît

$$g(x_0) = 0$$

sau

$$f(x_0) = \alpha.$$

Proprietatea pusă în evidență de această teoremă se numește proprietatea lui Darboux. Proprietatea lui Darboux nu este caracteristică funcțiilor continue.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ definită pe R este discontinuă în punctul $x = 0$, deoarece nu are limite laterale în $x = 0$, însă are proprietatea lui Darboux.

2) Funcția $f(x) = x^2$ este continuă pe $[0,2]$. Mulțimea valorilor este intervalul $[0,4]$.

Funcțiile continue pe o reuniune de intervale nu au proprietatea lui Darboux.

Exemplu

Funcția $f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -1, & -2 \leqslant x \leqslant -1 \end{cases}$

este continuă pe mulțimea compactă $[-2, -1] \cup [1,2]$, însă nu are proprietatea lui Darboux, deoarece $f(x)$ nu ia nici o valoare cuprinsă între -1 și $+1$. Se observă că mulțimea de definiție este compactă, însă este reuniunea a două intervale disjuncte.

7. Continuitatea uniformă

Definiție. Fie $f : X \to R$. Se spune că f este uniform continuă pe X dacă la orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

pentru orice pereche $x', x'' \in X$ care satisface inegalitatea

$$|x' - x''| < \eta(\varepsilon).$$

Din definiție rezultă că $\eta(\varepsilon)$ depinde numai de ε și este independent de x', x'', oarecare în X, care satisfac numai condiția $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$. Fie f continuă pe X și $x' \in X$. Dacă păstrăm pe x' fix, la ε dat corespunde un număr η care se schimbă dacă ε se schimbă, dar care depinde și de x', adică $\eta(\varepsilon, x')$. Dacă x' parcurge mulțimea X, ε fiind fix, mulțimea valorilor lui $\eta(\varepsilon, x')$ are o margine inferioară $\eta(\varepsilon) \geqslant 0$. Dacă $\eta(\varepsilon) > 0$, spunem că funcția f este uniform continuă pe X.

Exemple

1) Funcția $f(x) \equiv c$, $x \in R$ este uniform continuă pe R, deoarece $f(x') - f(x'') = 0$ oricare ar fi x', x'' din R.

2) Funcția $f(x) = \ln x$, $x \in [1,2]$ este uniform continuă pe $[1,2]$. Avem cu $x'', x' \in [1,2]$

$$|f(x') - f(x'')| = |\ln x' - \ln x''| = \left|\ln \frac{x'}{x''}\right| < \varepsilon$$

sau

$$\frac{x'}{x''} < e^{\varepsilon}, \quad \frac{|x' - x''|}{|x''|} = e^{\varepsilon} - 1, \quad |x' - x''| < |x''|(e^{\varepsilon} - 1),$$

deci $\eta(\varepsilon, x) < |x|(e^{\varepsilon} - 1)$. Dacă luăm $x = 1$, obținem $\eta(\varepsilon) = e^{\varepsilon} - 1$ și pentru orice $x \in [1,2]$ avem

$$\eta(\varepsilon) \leqslant \eta(\varepsilon, x).$$

Teorema 4. O funcție continuă pe un interval închis și mărginit (compact) este uniform continuă pe acel interval.

Demonstrație. Fie $[a, b]$ intervalul pe care f este continuă și să presupunem că f nu este uniform continuă pe $[a, b]$. Aceasta înseamnă că, $\varepsilon > 0$ fiind dat, oricare ar fi numărul $\eta > 0$, există două numere ξ'_η și ξ''_η astfel încît $|\xi'_\eta - \xi''_\eta| < \eta$ și $|f(\xi'_\eta) - f(\xi''_\eta)| > \varepsilon$. Să luăm pe $\eta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Obținem astfel două șiruri de puncte în $[a, b]$

$$\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n, \ldots$$

$$\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_n, \ldots,$$

astfel încît pentru orice $n > N$ avem

$$|\xi'_n - \xi''_n| < \frac{1}{n}$$

și

$$|f(\xi'_n) - f(\xi''_n)| > \varepsilon.$$

Intervalul $[a, b]$ fiind mărginit, șirul (ξ'_n) este de asemenea mărginit și, conform lemei lui Cesàro, el conține un subșir convergent

$$\xi'_{n_p} \to \xi, \ p \to \infty;$$

deoarece avem și

$$|\xi'_{n_p} - \xi''_{n_p}| < \frac{1}{n_p} \to 0, \ p \to \infty,$$

urmează că șirul (ξ''_{n_p}) este de asemenea convergent către ξ.

Intervalul $[a, b]$ fiind compact, punctul $\xi \in [a, b]$. Funcția $f(x)$, fiind continuă pe $[a, b]$, este continuă și în ξ, deci

$$f(\xi'_{n_p}) \to f(\xi), \quad f(\xi''_{n_p}) \to f(\xi),$$

ceea ce este în contrazicere cu

$$|f(\xi'_{n_p}) - f(\xi''_{n_p})| > \varepsilon, \text{ pentru orice } p \in N.$$

Ipoteza pe care am făcut-o ne-a dus la o contrazicere. Am demonstrat astfel că f este uniform continuă pe $[a, b]$.

Observații

1) Teorema 4 este adevărată și pe mulțimi compacte. Este suficient să înlocuim în demonstrație intervalul compact $[a, b]$ cu o mulțime compactă oarecare de numere reale.

2) O condiție suficientă de continuitate uniformă a unei funcții f definită pe o mulțime X este următoarea: pentru orice $x', x'' \in X$ să existe un număr $M > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x') - f(x'')| < M|x' - x''|. \qquad (1)$$

Într-adevăr, dacă luăm $\eta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{M}$, atunci pentru $|x'-x''|<\eta(\varepsilon)$ avem $|f(x')-f(x'')|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$ și f este uniform continuă pe X. Inegalitatea (1) se numește condiția lui Lipschitz.

Exemplu

Funcția $\sin\frac{1}{x}$ este continuă în intervalul (0,1] deschis la stînga. Funcția nu este uniform continuă pe (0,1]. Într-adevăr, dacă

$$x_p=\frac{2}{(2p+1)\pi},\quad x'_p=\frac{2}{(2p+3)\pi},\; p\in N,$$

oricare ar fi $\eta>0$, există $p\in N$ astfel încît

$$|x_p-x'_p|<\eta,$$

deoarece șirurile x_p, x'_p sînt convergente către zero cînd $p\to\infty$, însă

$$\sin\frac{1}{x_p}-\sin\frac{1}{x'_p}=2,$$

deci funcția $\sin\frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe (0,1]. Condițiile teoremei 4 nu sînt îndeplinite, deoarece intervalul (0,1] nu este compact.

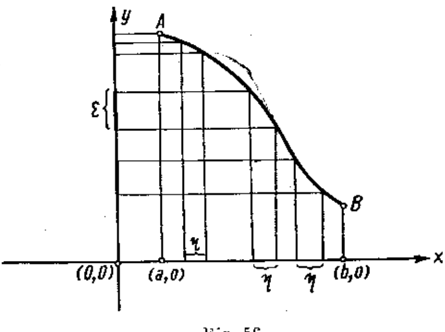


Fig. 56

Din punct de vedere geometric, continuitatea uniformă are următoarea interpretare: pentru orice subinterval $I<\eta$ de pe axa Ox, mulțimea $f(I)$ de pe axa Oy este interioară unui interval $<\varepsilon$, (fig. 56), adică pentru orice x', x'' din orice subinterval I oscilația funcției este inferioară lui ε.

Capitolul III

FUNCȚII ELEMENTARE

§ 1. POLINOMUL

1. Definiție. Operații cu polinoame

Definiții. 1) Se numește polinom de gradul n în variabila x funcția $P : R \to R$ definită de

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad a_k \in R,\ a_n \neq 0.$$

Numerele a_k se numesc coeficienții polinomului; numărul natural n se numește gradul polinomului.

2) Spunem că două polinoame

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

sînt egale dacă $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots, a_p = b_p,\ \ldots$

Două polinoame egale au același grad.

3) *Suma* a două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ este un polinom

$$S(x) = s_0 + s_1 x + \ldots + s_q x^q,$$

unde $s_0 = a_0 + b_0,\ s_1 = a_1 + b_1, \ldots$, gradul q fiind egal cu cel mai mare dintre numerele m și n dacă $m \neq n$ și cel mult egal cu n (dacă $m = n$). Adunarea polinoamelor este asociativă și comutativă.

4) *Elementul neutru* față de operația de adunare este polinomul nul $P(x) \equiv 0$, care are toți coeficienții nuli.

5) *Opusul* unui polinom $P(x)$ este polinomul $-P(x)$

$$-P(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_n x^n$$

și suma $P(x) + (-P(x))$ este polinomul nul.

Am arătat astfel că mulțimea polinoamelor de o variabilă cu coeficienți în R formează *grup abelian* față de operația de adunare.

6) *Produsul* a două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ de grad n și m, respectiv, este un polinom $T(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{m+n}x^{m+n}$ de grad $m + n$, cu coeficienții dați de

$$c_0 = a_0b_0,\ c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \ldots$$
$$\ldots, c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0, \ldots, c_{mn} = a_nb_m$$

. . . .

Inmulțirea polinoamelor este comutativă, asociativă și distributivă față de operația adunare.

Elementul neutru față de operația înmulțire este polinomul $P(x) \equiv 1$, numit polinomul 1.

Proprietățile enunțate arată că mulțimea polinoamelor de o variabilă cu coeficienți în R formează un inel comutativ față de operațiile de adunare și înmulțire.

Observație

Dacă două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ sînt egale, ele iau valori egale pentru orice $x \in R$; de aceea, două polinoame egale se numesc și *polinoame identice* și se scrie $P(x) \equiv Q(x)$.

Polinomul nul ia valoarea zero pentru orice $x \in R$; din această cauză se numește și *polinom identic nul.*

2. Divizibilitatea polinoamelor

Fiind date polinoamele

$$A(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$
$$B(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m, \qquad m \leqslant n,$$

să arătăm că există două polinoame

$$C(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-m}x^{n-m}$$
$$R(x) = r_0 + r_1x + \ldots + r_{m-1}x^{m-1}$$

astfel încît să avem identic

$$A(x) \equiv B(x)\,C(x) + R(x).$$

Egalînd coeficienții puterilor lui x, obținem sistemul

$$a_n = b_m \cdot c_{n-m}$$
$$a_{n-1} = b_m\,c_{n-m-1} + b_{m-1}\,c_{n-m}$$

. . . .

$$a_0 = b_0c_0 + r_0,$$

cu soluția

$$c_{n-m} = \frac{a_n}{b_m}, \qquad b_m \neq 0,$$

$$c_{n-m-1} = \frac{1}{b_m}\left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-1}\right)$$

. . . .

și se vede că polinoamele $C(x)$ și $R(x)$ sînt unice, deoarece coeficienții lor sînt unic determinați.

Polinomul $C(x)$ de grad $n - m$ se numește *cît* și polinomul $R(x)$ de grad $\leqslant m - 1$ se numește *rest*.

Definiție. Polinomul $A(x)$ se spune că este divizibil cu polinomul $B(x)$ dacă $R(x) \equiv 0$.

Exemple

1) $A(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x - 1, \quad B(x) = x^2 - x + 1.$

Avem $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x - 1 \equiv (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 1) + 2x - 2$, deci $C(x) = x^2 - 2x + 1$, $R(x) = 2x - 2$; polinomul $A(x)$ nu se divide cu polinomul $B(x)$.

2) $A(x) = x^5 + x^4 - x - 1$, $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Avem $x^5 + x^4 - x - 1 \equiv (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 1)$; polinomul $A(x)$ se divide cu $B(x)$

3. Ecuații algebrice

Se numește ecuație algebrică ecuația

$$P(x) = 0,$$

unde $P(x)$ este un polinom. Pentru ca un polinom $P(x)$ să se dividă cu $x - a$ trebuie ca în

$$P(x) \equiv (x - a)\, Q_1(x) + R, \tag{1}$$

unde R este o constantă, să avem $R = 0$. Egalitatea, fiind adevărată pentru orice x, este adevărată și pentru $x = a$, deci

$$R = P(a) = 0.$$

Teoremă. Un polinom se divide cu $x - a$ dacă $P(a) = 0$, adică $x = a$ este rădăcină a ecuației $P(x) = 0$.

În legătură cu ecuațiile algebrice avem următoarea teoremă:

Teorema lui d'Alembert. O ecuație algebrică de gradul n are n rădăcini.

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt cele n rădăcini ale ecuației

$$P(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0,$$

atunci polinomul $P(x)$ se divide cu $(x - x_1), (x - x_2), \ldots, (x - x_n)$, deci

$$P(x) \equiv a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \tag{2}$$

și (2) constituie *descompunerea în factori liniari* a polinomului $P(x)$.

Dacă două rădăcini sînt egale $x_1 = x_2$, atunci spunem că x_1 este o rădăcină dublă și $(x - x_1)^2$ intervine în factorii produsului care dă pe $P(x)$. În general, dacă p rădăcini sînt egale $x_1 = x_2 = \ldots = x_p$, spunem că x_1 este rădăcină multiplă de ordinul p și termenul $(x - x_1)^p$ intervine în descompunerea în factori a lui $P(x)$. Prin urmare, dacă o ecuație algebrică de gradul n are rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de ordinul $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respectiv de multiplicitate (λ_i numere întregi pozitive sau nule), avem identitatea

$$P(x) \equiv a_n (x - x_1)^{\lambda_1} (x - x_2)^{\lambda_2} \ldots (x - x_m)^{\lambda_m}, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n.$$

Teoremă. Dacă ecuația $P(x) = 0$ cu coeficienți reali admite rădăcina complexă $\alpha + i\beta$, atunci admite și rădăcina conjugată $\alpha - i\beta$.

Demonstrație. Avem $P(\alpha + i\beta) = A(\alpha, \beta) + iB(\alpha, \beta) = 0$, deci $A(\alpha, \beta) = 0$ și $B(\alpha, \beta) = 0$, însă $P(\alpha - i\beta) = A(\alpha, \beta) - iB(\alpha, \beta)$; prin urmare, $P(\alpha - i\beta) = 0$ și $\alpha - i\beta$ este de asemenea o rădăcină. Produsul

$$[x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

intervine în descompunerea în factori a polinomului $P(x)$ astfel încît forma generală a acestei factorizări este

$$P(x) \equiv a_n (x - b_1)^{\lambda_1} (x - b_2)^{\lambda_2} \ldots (x - b_m)^{\lambda_m} [(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{\mu_1} \ldots$$
$$\ldots [(x - \alpha_p)^2 + \beta_p^2]^{\mu_p},$$

cu $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + 2\mu_p = n$. Conform acestei descompuneri în factori, ecuația $P(x) = 0$ are rădăcinile reale $x_k = b_k$ de ordinul λ_k de multiplicitate $(k = 1, 2, \ldots, m)$ și rădăcinile complexe $x_h = \alpha_h + i\beta_h$, $\bar{x}_h = \alpha_h - i\beta_h$ de ordinul μ_h de multiplicitate $(h = 1, 2, \ldots, p)$.

4. Condiția ca două ecuații algebrice să aibă rădăcini comune

Teoremă (Euler). Condiția necesară și suficientă ca două ecuații algebrice $A(x) = 0$, $B(x) = 0$ de gradul n și s respectiv să aibă o rădăcină comună este: să existe două polinoame $A_1(x)$, $B_1(x)$ de grad $\leqslant n - 1$ și $\leqslant s - 1$, respectiv, astfel încît

$$A(x)\,B_1(x) - B(x)\,A_1(x) \equiv 0. \tag{1}$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă α_1 este o rădăcină comună a celor două ecuații

$$A(x) = (x - \alpha_1)\,A_1(x)$$
$$B(x) = (x - \alpha_1)\,B_1(x),$$

deci

$$A(x)\,B_1(x) - B(x)\,A_1(x) \equiv 0,$$

şi $A_1(x)$, $B_1(x)$ sînt polinoamele căutate. Reciproc, dacă există polinoamele $A_1(x)$, $B_1(x)$ de grad $n-1$ şi $s-1$ respectiv, astfel încît

$$A(x)\,B_1(x) \equiv B(x)\,A_1(x),$$

această identitate arată că orice factor liniar al lui $A(x)$ este în acelaşi timp factor al produsului $B(x)\,A_1(x)$ şi, cum $A_1(x)$ este de grad $n-1$, el are cel mult $n-1$ factori liniari ai lui $A(x)$; prin urmare, cel puţin un factor liniar al lui $A(x)$ divide pe $B(x)$. Teorema e demonstrată.

Dacă luăm

$$A(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$
$$B(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_sx^s$$

şi

$$A_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \ldots + \alpha_{n-1}x^{n-1}$$
$$B_1(x) = \beta_0 + \beta_1x + \ldots + \beta_{s-1}x^{s-1}$$

Din identitatea (1) obţinem $n+s$ ecuaţii liniare şi omogene în $n+s$ necunoscute α_i, β_j, care pentru a nu admite soluţia banală (echivalentă cu $A_1(x)$, $B_1(x)$ identic nule) trebuie ca determinantul sistemului să fie nul. Să observăm că această condiţie este echivalentă cu condiţia ca sistemul de $n+s$ ecuaţii

$$\begin{matrix} xA(x) = 0, & x^2A(x) = 0, \ldots, & x^sA(x) = 0 \\ xB(x) = 0, & x^2B(x) = 0, \ldots, & x^nB(x) = 0 \end{matrix} \qquad (2)$$

liniare şi omogene în necunoscutele $x, x^2, \ldots, x^{n+s}$ să admită şi soluţii care nu sînt toate nule. Determinantul sistemului (2) se numeşte eliminantul celor două ecuaţii sau *determinantul lui Sylvester* şi este dat de

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \ldots a_n & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_0 \ldots a_{n-1} & a_n & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_0 & b_1 \ldots b_{s-1} & b_s & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_s \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} s \text{ linii} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n \text{ linii} \end{matrix}$$

Exemplu

Ecuaţiile

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$$
$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 = 0$$

au o rădăcină comună dacă determinantul de ordinul cinci

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

este nul.

5. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0, \qquad a_n \neq 0,$$

avem identitatea

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \equiv a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

din care obținem

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum_{i \neq j = 1}^{n} x_i\, x_j = -\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{i \neq j \neq k = 1}^{n} x_i\, x_j\, x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

. . . .

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n},$$

numite și relațiile dintre rădăcini și coeficienți sau relațiile lui Viète. Relațiile de mai sus nu pot servi la rezolvarea ecuației din care provin, deoarece prin eliminarea succesivă a lui $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ se ajunge la ecuația de la care am plecat. Dacă se dau legături suplimentare între rădăcini, relațiile de mai sus sînt adesea folositoare pentru rezolvarea efectivă.

Exemplu

Să se afle condiția pentru ca ecuația

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

să aibă rădăcinile în progresie geometrică, apoi să se rezolve.

Punem $x_1 = \frac{u}{v}$, $x_2 = u$, $x_3 = uv$. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți ne dau

$$u\left(1 + v + \frac{1}{v}\right) = -a$$

$$u^2\left(v + \frac{1}{v} + 1\right) = b$$

$$u^3 = -c$$

Din primele două relații avem $u = -\frac{b}{a}$, care înlocuită în a treia ne conduce la condiția căutată

$$b^3 = a^3 c.$$

Am găsit și $x_2 = -\frac{b}{a}$. Avem

$$x^3 + ax^2 + bx + \frac{b^3}{a^3} = \left(x + \frac{b}{a}\right)\left(x^2 + \frac{a^2 - b}{a}x + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Celelalte două rădăcini sînt rădăcinile ecuației

$$x^2 + \frac{a^2 - b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} = 0.$$

6. Formula lui Cardan pentru rezolvarea ecuației de gradul trei

Fie ecuația

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1}$$

Dacă punem $x = u + v$, $x^3 = u^3 + v^3 + 3\,uv\,(u + v)$, avem

$$x^3 - 3\,uv\,(u + v) - u^3 - v^3 = 0$$

și pentru

$$-3uv = p, \quad u^3 + u^3 = -q$$

este identică cu ecuația dată. Sistemul

$$uv = -\frac{p}{3}, \quad u^3 + v^3 = -q$$

sau

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}, \quad u^3 + v^3 = -q$$

conduce la ecuația

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0, \quad (X_1 = u^3,\ X^2 = v^3). \tag{2}$$

Realizantul acestei ecuații este

$$\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}.$$

Ecuația (2) are soluțiile

$$X_1 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

$$X_2 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2},$$

deci

$$u_1 = \sqrt[3]{X_1}, \qquad u_2 = \varepsilon\sqrt[3]{X_1}, \qquad u_3 = \varepsilon^2\sqrt[3]{X_1},$$

$$v_1 = \sqrt[3]{X_2}, \qquad v_2 = \varepsilon\sqrt[3]{X_2}, \qquad v_3 = \varepsilon^2\sqrt[3]{X_2},$$

unde ε este o rădăcină cubică complexă a unității. Cu aceste rezultate putem scrie soluțiile ecuației (1):

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

Discuție. a) *Dacă* $\Delta > 0$, atunci $\sqrt[3]{X_1}$ și $\sqrt[3]{X_2}$ sînt reali, x_1 este real și x_2, x_3 sînt complexe conjugate.

b) *Dacă* $\Delta = 0$, atunci $\sqrt[3]{X_1} = \sqrt[3]{X_2}$, x_1 este real, $x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{X_1}$, deoarece $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$.

c) *Dacă* $\Delta < 0$, X_1 și X_2 sînt complexe conjugate. Fie

$$X_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \ X_2 = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

$$\sqrt[3]{X_1} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \quad \sqrt[3]{X_2} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{-\varphi}{3} + i\sin\frac{-\varphi}{3}\right),$$

deci

$$\sqrt[3]{X_1}\cdot\sqrt[3]{X_2}=\sqrt[3]{\rho^2}=-\frac{p}{3},\ \text{deoarece } uv=-\frac{p}{3} \text{ și } \sqrt[3]{\rho}=\sqrt{-\frac{p}{3}},\ (p<0)$$

$$x_1=\sqrt[3]{X_1}+\sqrt[3]{X_2}=2\sqrt{\frac{-p}{2}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$x_2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt[3]{X_1}+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\sqrt[3]{X_2}=$$

$$=2\sqrt{\frac{-p}{2}}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}$$

$$x_3=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\sqrt[3]{X_1}+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt[3]{X_2}=$$

$$=2\sqrt{\frac{-p}{2}}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$$

și cele trei soluții sînt reale.

Observație

Expresiile rădăcinilor x_1, x_2, x_3 pot fi strînse într-o singură formulă, numită formula lui *Cardan*

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

din care obținem pe x_1, x_2, x_3, luînd pentru primul radical cubic cele trei valori ale sale, iar valoarea corespunzătoare a celui de-al doilea radical cubic este aceea care satisface relația $u\cdot v=-\frac{p}{3}$.

Exemplu

Să se rezolve ecuația $x^3-5x-2=0$.

$$\Delta=\left(\frac{-5}{3}\right)^3+\left(\frac{-2}{2}\right)^2=\frac{-98}{27}<0.$$

Ecuația are trei rădăcini reale. Procedînd ca mai sus, obținem

$$x_1=2,\quad x_2=1-\sqrt{2},\quad x_3=1+\sqrt{2}.$$

7. Determinarea rădăcinilor raționale ale unei ecuații algebrice

Fie ecuația

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0, \qquad a_k = \text{numere întregi,} \tag{1}$$

și să presupunem că admite rădăcina $x = \frac{p}{q}$, p, q întregi primi între ei. Trebuie să avem

$$a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \ldots + a_n \frac{p^n}{q^n} = 0 \tag{2}$$

sau

$$q(q^{n-1}a_0 + q^{n-2}pa_1 + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}) = -a_n p^n,$$

care este o egalitate între numere întregi. Deoarece p este prim cu q, urmează *că a_n este divizibil cu q.* Egalitatea (2) se mai poate scrie

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n,$$

din care se deduce *că a_0 trebuie să fie divizibil cu p.*

Exemple

1) Ecuația $x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$ nu are rădăcini fracționare, deoarece coeficientul lui x^n este numărul 1.

2) Ecuația $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$ nu are rădăcini întregi, în afară poate de $+1$ sau -1, deoarece $a_0 = 1$.

Dacă $x = \frac{p}{q}$ este o rădăcină a ecuației (1), atunci avem identitatea

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \equiv (qx - p)(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}), \tag{3}$$

unde $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sînt tot numere întregi. Dacă în (3) înlocuim pe x cu $+1$ apoi cu -1, rezultă că

$$\frac{f(1)}{q-p} \text{ și } \frac{f(-1)}{p+q}$$

sînt de asemenea numere întregi.

Exemplu

Să se găsească rădăcinile raționale ale ecuației

$$f(x) \equiv 3x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 18x - 8 = 0.$$

Rădăcinile posibile sînt

$$-\frac{1}{3},\ +\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ +\frac{2}{3},\ -\frac{4}{3},\ +\frac{4}{3},\ -\frac{8}{3},\ +\frac{8}{3}, -1,\ +1,\ -2, +2,\ -4,\ +4$$

$$-8,\ +8.$$

Avem $f(1) = 36, f(-1) = -16$ şi condiţia $\frac{f(1)}{p-q}, \frac{f(-1)}{p+q}$ întregi este îndeplinită numai de

$$-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, +2, -2, -4, +4, -8, +8.$$

Observăm că pentru $x \geqslant 2$, $f(x) > 0$, deci singurele rădăcini pot fi

$$-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, -2, -4, -8.$$

Înlocuind în ecuaţie, găsim că sînt rădăcini numerele -2 şi $\frac{1}{3}$.

Rădăcinile ecuaţiei date sînt $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2}$.

8. Metoda lui Lobacevski pentru aproximarea rădăcinilor unei ecuaţii algebrice

Fie ecuaţia

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0.$$

Să presupunem mai întîi că are toate rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reale şi distincte, ordonate în ordinea modulelor astfel

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > \ldots > |x_n|.$$

Avem

$$f(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Să formăm şi ecuaţia

$$f(-x) \equiv (-1)^n (x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_n) = 0.$$

Ecuaţia

$$f_1(x^2) = f(x) f(-x) = (-1)^n (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \ldots (x^2 - x_n^2) = 0,$$

dacă înlocuim pe x^2 cu x, are rădăcinile $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$. Prin urmare, ecuaţia $f_1(x) = 0$ are ca rădăcini pătratele rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = 0$.

Să observăm că dacă punem

$$f(x) \equiv P(x^2) + x\,Q(x^2)$$

$$f(-x) \equiv P(x^2) - x\,Q(x^2)$$

atunci ecuaţia care are ca rădăcini pătratele rădăcinilor ecuaţiei iniţiale se obţine din

$$P^2(x^2) - x^2 Q^2(x^2) = 0,$$

înlocuind pe x^2 cu x, deci

$$f_1(x) \equiv P^2(x) - xQ^2(x) = 0.$$

Dacă cu ecuația $f_1(x)$ procedăm în același mod cum am procedat cu ecuația $f(x) = 0$, obținem o ecuație care are ca rădăcini pe $x_1^4, x_2^4, \ldots, x_n^4$. Continuînd operația de p ori, obținem o ecuație $f_p(x)$, fie

$$f_p(x) \equiv x^n + q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_1x + q_0 = 0,$$

care are rădăcinile

$$x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m, \qquad \text{unde } m = 2^p.$$

Să considerăm acum relațiile dintre rădăcini și coeficienți pentru ecuația $f_p(x) = 0$

$$x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m = -q_{n-1}$$

$$x_1^m \cdot x_2^m + \ldots + x_{n-1}^m \cdot x_n^m = q_{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1^m x_2^m \ldots x_n^m = (-1)^n q_0$$

sau

$$x_1^m\left[1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^m + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^m\right] = -q_{n-1}$$

$$x_1^m x_2^m\left[1 + \ldots + \left(\frac{x_{n-1}x_n}{x_1x_2}\right)^m\right] = q_{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Deoarece $\left|\frac{x_k}{x_1}\right| < 1$ și m crește repede cu p, urmează că după un număr anumit de operații suma $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{x_k}{x_1}\right)^m$ este neglijabilă față de 1, astfel încît putem scrie

$$x_1^m \simeq -q_{n-1}, \quad x_1 \simeq \sqrt[m]{-q_{n-1}}.$$

A doua relație dă, pe baza aceluiași raționament,

$$x_1^m x_2^m \simeq q_{n-2}, \quad x_2 \simeq \sqrt[m]{-\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}}$$

și în general

$$x_k \simeq \sqrt[m]{-\frac{q_{n-k}}{q_{n-k+1}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă rădăcinile x_k sînt toate reale și distincte, atunci avem efectiv

$$x_k \simeq \pm \sqrt[m]{-\frac{q_{n-k}}{q_{n-k+1}}}, \qquad m = 2^p,$$

și luăm + sau − după cum x_k este pozitiv sau negativ.

Dacă rădăcinile sînt complexe conjugate, două cîte două $x_1 = \alpha + i\beta$, $x_2 = \alpha - i\beta$, polinomul $f(x)$ se divide prin $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$. Însă operațiile de mai sus ne dau pe $|x_1| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \rho$, deci rămîne de determinat numai α. Dacă facem împărțirea lui $f(x)$ cu $x^2 - 2\alpha x + \rho^2$, obținem un rest de gradul întîi $R(\alpha) + x\,S(\alpha)$, care trebuie să fie identic nul, deoarece împărțirea se face exact.

Polinoamele în α, $R(\alpha)$ și $S(\alpha)$ au, prin urmare, o rădăcină comună și admit deci un divizor comun de gradul întîi.

În modul acesta și α este determinat.

9. Polinoame Hurwitz

Definiție. Se numește polinom Hurwitz un polinom cu coeficienți reali sau complecși

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

astfel încît ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile cu părțile reale negative.

Noi vom considera numai polinoame cu coeficienți reali. Prin urmare, un polinom Hurwitz are rădăcinile reale negative și rădăcinile imaginare cu partea reală negativă. În probleme de mecanică și în primul rînd în teoria stabilității mișcării se întîlnesc probleme care conduc la polinoame Hurwitz. Ne propunem să determinăm condiții necesare și suficiente pentru ca un polinom $f(x)$ să fie polinom Hurwitz. În acest scop vom stabili cîteva leme. Fie

$$f(x) \equiv a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

$$f(-x) \equiv (-1)^n a_n (x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_n).$$

Lema 1. Dacă $f(x)$ este un polinom Hurwitz, atunci

$$0 \leqslant |f(x)| < |f(-x)|, \quad \textbf{pentru} \quad R(x) < 0, \tag{1}$$

$$0 \leqslant |f(-x)| < |f(x)|, \quad \textbf{pentru} \quad R(x) > 0, \tag{2}$$

$$0 < |f(x)| = |f(-x)|, \quad \textbf{pentru} \quad R(x) = 0, \tag{3}$$

unde cu $R(x)$ am notat partea reală a numărului complex x.

Demonstrație. Dacă $x = u + iv$, $x_k = u_k + iv_k$, avem

$$|x + \overline{x}_k|^2 - |x - x_k|^2 = (u + u_k)^2 - (v - v_k)^2 - (u - u_k)^2 + (v - v_k)^2 = 4uu_k,$$

deci dacă $u_k < 0$, atunci

$$|x + \overline{x}_k| < |x - x_k|, \text{ dacă } u > 0,$$

și

$$|x + \overline{x}_k| > |x - x_k|, \text{ dacă } u < 0,$$

$$|x + \overline{x}_k| = |x - x_k|, \text{ dacă } u = 0,$$

de unde rezultă imediat lema 1, deoarece

$$|f(x)| = |a_n|\cdot|x - x_1|\cdot|x - x_2| \dots |x - x_n|$$

$$|f(-x)| = |a_n|\cdot|x + x_1|\cdot|x + x_2| \dots |x + x_n| = |a_n|\cdot|x + \overline{x}_1| \dots |x + \overline{x}_n|.$$

L e m a 2. Dacă α și β sînt două numere oarecare satisfăcînd condiția

$$|\alpha| > |\beta|,$$

un polinom $f(x)$ este un polinom Hurwitz dacă și numai dacă polinomul

$$g(x) = \alpha f(x) - \beta f(-x) \tag{4}$$

este polinom Hurwitz.

Demonstrație. Dacă $f(x)$ este un polinom Hurwitz, pentru $R(x) \geqslant 0$ vom avea, conform lui (2) sau (3),

$$|\alpha f(x)| > |\beta f(-x)|.$$

Prin urmare, relația $\alpha f(x) - \beta f(-x) = 0$ nu poate avea loc decît dacă $R(x) < 0$. Polinomul $g(x)$ are deci toate rădăcinile de parte reală negativă. Din (4) avem

$$g(x) = \alpha f(x) - \beta f(-x)$$

$$g(-x) = -\beta f(x) + \alpha f(-x),$$

de unde

$$f(x) = \alpha_1\cdot g(x) - \beta_1\cdot g(-x),$$

cu $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}$, $\beta_1 = -\frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$, deci $|\alpha_1| > |\beta_1|$, și, cum $g(x)$ este polinom Hurwitz, urmează că $f(x)$ este polinom Hurwitz.

L e m a 3. Dacă ξ este un număr astfel încît $R(\xi) < 0$, un polinom $f(x)$ de gradul n va fi un polinom Hurwitz dacă și numai dacă

$$|f(\xi)| < |f(-\xi)|$$

și dacă polinomul

$$f_1(x) = \frac{f(-\xi) f(x) - f(\xi) f(-x)}{x - \xi}$$

de gradul $n - 1$ este polinom Hurwitz.

Demonstrație. Conform lemei 2, polinomul

$$g(x) = f(-\xi) f(x) - f(\xi) f(-x)$$

este polinom Hurwitz dacă $f(x)$ este polinom Hurwitz, pentru că

$$|f(\xi)| < |f(-\xi)|.$$

Deoarece $g(x)$ se divide cu $x - \xi$, urmează că și $f_1(x)$ este polinom Hurwitz.
Reciproc, dacă f_1 este polinom Hurwitz, polinomul

$$g(x) = (x - \xi) f_1(x)$$

este polinom Hurwitz, deoarece $R(\xi) < 0$ și toate rădăcinile lui $f_1(x)$ au părțile reale negative. Conform lemei 2, urmează că $f(x)$ este polinom Hurwitz.

Observație

Dacă considerăm pe $f_1(x)$ ca polinom $F(x, \xi)$ în două variabile x, ξ de gradul $n - 1$ în fiecare din ele, putem scrie

$$F(x, \xi) = \frac{f(-\xi) f(x) - f(\xi) f(-x)}{x - \xi} = F_0(x) + \xi F_1(x) + \ldots + \xi^{n-1} F_{n-1}(x).$$

Dacă înmulțim acum cu $(x - \xi)$ și înlocuim pe $f(\xi)$ și $f(-\xi)$ cu expresiile lor, avem, egalînd coeficientul liber și coeficientul lui ξ,

$$a_0 f(x) - a_0 f(-x) = x F_0(x) \tag{5}$$

$$-a_1 f(x) - a_1 f(-x) = -F_0(x) + x F_1(x), \tag{6}$$

iar dacă $\varphi(x) = a_0 x - a_1 \xi x + a_0 \xi$, $\psi(x) = a_0 x + a_1 \xi x + a_0 \xi$,

avem și

$$x^2 [F_0(x) + \xi F_1(x)] = f(x) \varphi(x) - f(-x) \psi(x). \tag{7}$$

Lema 4. Dacă ξ este un număr astfel încît $R(\xi) < 0$, atunci polinomul $f(x)$ de gradul n va fi un polinom Hurwitz atunci și numai atunci cînd coeficienții săi a_0, a_1 satisfac condițiile

$$a_0 \neq 0, \quad R\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$$

și cînd polinomul de gradul $n - 1$

$$H(x) = F_0(x) + \xi F_1(x)$$

este un polinom Hurwitz.

Demonstrație. Să presupunem că $f(x)$ este un polinom Hurwitz. Coeficientul $a_0 \neq 0$, deoarece, în caz contrar, $x = 0$ anulează pe $f(x)$, ceea ce nu se poate, deoarece $f(x)$ este polinom Hurwitz și $R(0) \neq 0$.

Conform relațiilor dintre rădăcinile și coeficienții ecuației $f(x) = 0$, avem

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Polinomul $f(x)$ fiind polinom Hurwitz $R(x_i) < 0$, deci și $R\left(\frac{1}{x_i}\right) < 0$ pentru x_i reale sau complexe, suma inverselor rădăcinilor este negativă, de unde rezultă cu necesitate că $R\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$.

Să arătăm acum că $H(x)$ este un polinom Hurwitz; trebuie să arătăm că dacă $R(s) \geqslant 0$ atunci s nu este o rădăcină a lui $H(x)$. Într-adevăr, dacă numărul t are $R(t) < 0$, atunci, conform lemei 3, $f(x) = F(x, t)$ va fi un polinom Hurwitz și $F(s, t) \neq 0$. Dacă punem $t = \frac{1}{u}$, deci și $R(u) < 0$, obținem

$$u^{n-1} F\left(s, \frac{1}{u}\right) = \Phi(s, u) = F_0(s)\, u^{n-1} + F_1(s)\, u^{n-2} + \ldots + F_{n-1}(s) \neq 0.$$

Să presupunem mai întîi că $F_0(s) \neq 0$. În această situație, $\Phi(s, x)$ este un polinom de gradul $n-1$, ale cărui rădăcini au părțile reale nenegative, deoarece $R(s) > 0$ (lema 3). Suma tuturor rădăcinilor va fi nenegativă, deci

$$R\left(-\frac{F_1(s)}{F_0(s)}\right) \geqslant 0.$$

Dacă s ar fi totuși o rădăcină a lui $H(x)$, deci dacă

$$H(s) = F_0(s) + \xi F_1(s) = 0,$$

avem

$$-\frac{F_1(s)}{F_0(s)} = \frac{1}{\xi}, \text{ real}\left(\frac{1}{\xi}\right) < 0,$$

ceea ce duce la o contradicție; $H(x)$ nu are rădăcină pe s cu $R(s) \geqslant 0$, deci $H(x)$ este un polinom Hurwitz.

Să presupunem acum că $F_0(s) = 0$; atunci din $H(s) = 0$ urmează că și $F_1(s) = 0$ și din relațiile (5) și (6) urmează

$$a_0(f(s) - f(-s)) = 0$$
$$a_1(f(s) + f(-s)) = 0$$

sau

$$a_0 a_1 f(s) = 0.$$

Însă $f(s) \neq 0$, deoarece $R(s) \geqslant 0$ și $f(x)$ este polinom Hurwitz; prin urmare, nu putem avea decît $a_0 a_1 = 0$, adică sau $a_0 = 0$, sau $a_1 = 0$, deci $R\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = 0$, ceea ce este în contradicție cu ipotezele din lemă.

Prin urmare, $H(s) \neq 0$ și $H(x)$ este polinom Hurwitz.

Reciproc, să presupunem că $H(x)$ este polinom Hurwitz, $a_0 \neq 0$, $R\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$ şi să arătăm că $f(x)$ este polinom Hurwitz. Relaţia (7) se scrie

$$x^2H(x) = f(x)\,\varphi(x) - f(-x)\,\psi(x)$$

şi

$$x^2H(-x) = f(-x)\,\varphi(-x) - f(x)\,\psi(-x),$$

din care obţinem

$$[\varphi(-x)\,\varphi(x) - \psi(-x)\,\psi(x)]\,f(x) = x^2\,[H(x)\,\varphi(-x) + H(-x)\,\psi(x)]. \quad (8)$$

Fie numărul s cu $R(s) \geqslant 0$; deoarece $H(x)$ este polinom Hurwitz, avem, conform *lemei 1*,

$$|H(s)| > |H(-s)| \quad \text{sau} \quad |H(s)| = |H(-s)| > 0. \quad (9)$$

Să presupunem că s este o rădăcină a polinomului $f(x)$. Deoarece $s \neq 0$ şi $a_0 \neq 0$, rezultă din (8) că

$$H(s)\,\varphi(-s) + H(-s)\,\psi(s) = 0,$$

însă

$$\varphi(-s) = -a_0s + a_1\xi s + a_0\xi,\ \ \psi(s) = +a_0s + a_1\xi s + a_0\xi$$

şi

$$|\varphi(-s)| > |\psi(s)|$$

pentru că

$$\left|\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{s} - \frac{1}{\xi}\right| > \left|\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{s} + \frac{1}{\xi}\right|. \quad (9')$$

Într-adevăr, polinomul $y - b$ este, pentru $R(b) < 0$, polinom Hurwitz, deci, conform lemei 1, dacă $R(y) > 0$ atunci $|-y-b| < |y-b|$ şi dacă punem

$$y = \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{s},\quad R(y) > 0,\quad b = \frac{1}{\xi},\ R(b) < 0,$$

neegalitatea (9) este echivalentă cu

$$|\varphi(-s)| > |\psi(s)|.$$

Dacă ţinem seama de această neegalitate şi avem în vedere lema 1, nu putem avea

$$H(s)\,\varphi(-s) + H(-s)\,\psi(s) = 0,$$

deci s nu este rădăcină a polinomului $f(x)$.

Rămîne să mai arătăm că polinomul $H(x)$ este de gradul $n-1$. Deoarece în prima parte din (8) avem un polinom de gradul $n+2$, iar $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sînt polinoame de gradul întîi, urmează că $H(x)$ este cel mult de gradul $n-1$.

Dacă ar fi de gradul $n - 2$, ar trebui ca atunci coeficientul lui x^{n-1} să fie nul; însă din relația (7) acest coeficient este

$$a_n(a_0 - a_1\xi) - (-1)^n a_n(a_0 + a_1\xi) = 0,$$

din care rezultă egalitatea

$$\left|\frac{1}{\xi} - \frac{a_1}{a_0}\right| = \left|\frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0}\right|,$$

ceea ce nu se poate, deci $H(x)$ este polinom de gradul $n - 1$.

Sîntem în măsură acum să enunțăm

Teorema lui Hurwitz. O condiție necesară și suficientă pentru ca toate rădăcinile unui polinom de gradul n

$$f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

cu coeficienți reali să aibă părțile reale negative este ca toți determinanții

$$D_0 = a_0,\ D_1 = a_1,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix},\ \ldots,\ D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

(unde $a_k = 0$ pentru $k > n$) să fie pozitivi.

Demonstrație. Vom demonstra prin inducție completă. Polinomul $a_0 + a_1x$ este polinom Hurwitz dacă $a_0 > 0$, $a_1 > 0$. Presupunem adevărată teorema pînă la $n - 1$. Să arătăm că este adevărată și pentru n. Dacă punem

$$g(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots$$

$$h(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \ldots,$$

atunci $f(x) = g(x) + h(x)$ și $f(-x) = g(x) - h(x)$; dacă le înlocuim în (7) obținem

$$x^2 H(x) = 2a_0(x + \xi)h(x) - 2a_1\xi xg(x),$$

deci

$$\frac{1}{2} H(x) = a_0a_1 - \xi(a_1a_2 - a_0a_3)x + a_0a_3x^2 - \xi(a_1a_4 - a_0a_5)x^3 +$$

$$+ a_0a_5x^4 - \xi(a_1a_6 - a_0a_7)x^5 + \ldots$$

Ţinînd seama de lema 4, pentru $\xi = -1$, deoarece $a_0 > 0$, polinomul $f(x)$ va fi polinom Hurwitz dacă şi numai dacă $a_1 > 0$ şi dacă polinomul $\frac{1}{2} H(x)$ este polinom Hurwitz. Pentru $\xi = -1$, avem

$$\frac{1}{2} H(x) = a_0 a_1 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) x + a_0 a_3 x^2 + (a_1 a_4 - a_0 a_5) x^3 +$$

$$+ a_0 a_5 x^4 + (a_1 a_6 - a_0 a_7) x^5 + \ldots$$

Polinomul $\frac{1}{2} H(x)$ de gradul $n-1$ este polinom Hurwitz dacă toţi determinanţii

$$\Delta_0 = a_0 a_1, \ \Delta_1 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_0 a_1 \\ a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_0 a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots$$

$$\ldots, \ \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_0 a_1 & 0 & \ldots 0 \\ a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_0 a_3 & a_1 a_4 - a_0 a_3 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

sînt pozitivi. Însă pentru $1 \leqslant k \leqslant n-1$, transformînd pe Δ_k într-un determinant de ordinul $k+1$,

$$a_0 a_1 \Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a_0 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_0 a_1 & 0 & \ldots 0 \\ a_0 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_0 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

unde dacă adunăm coloana întîi la a doua, a treia la a patra ş.a.m.d., obţinem determinantul D_{k+1} înmulţit cu $(a_0 a_1)^{\frac{k+1}{2}}$, dacă k este impar, şi cu $(a_0 a_1)^{\frac{k}{2}}$, dacă k este par. Prin urmare, condiţiile ca polinomul $H(x)$ să fie polinom Hurwitz sînt ca toţi determinanţii D_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ să fie pozitivi. Conform lemei 4, $f(x)$ este polinom Hurwitz. Teorema este demonstrată.

Exemplu

Polinomul $f(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3$ este polinom Hurwitz deoarece $D_0 = D_1 = D_2 = D_3 = 1$.

Observaţie

Un polinom Hurwitz are în mod necesar toţi coeficienţii pozitivi, deoarece factorizarea sa nu conţine decît termeni $(x + a)$ şi $(x + \alpha)^2 + \beta^2$ cu a, α pozitive. Această condiţie nu este suficientă, după cum rezultă din teorema lui Hurwitz.

§ 2. FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ. FUNCȚIA LOGARITMICĂ

1. Funcția exponențială

Funcția $f(x) = a^x$, $x \in R$ $(a > 0, a \neq 1)$, se numește *funcție exponențială*; pentru $0 < a < 1$ este monoton descrescătoare (fig. 57),

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	a	$\searrow$	0

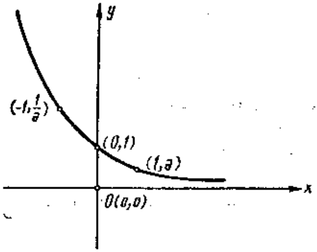


Fig. 57

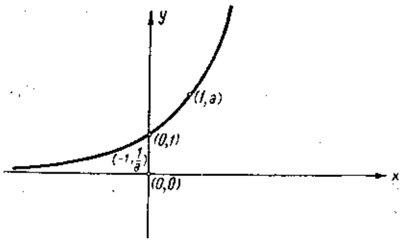


Fig. 58

pentru $a > 1$ este monoton crescătoare (fig. 58),

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

Exercițiu

Dacă $a \geq 2$, atunci $a^x > x$. Din formula binomului avem $(\alpha + 1)^n > 1 + \alpha n$, deci dacă $\alpha > 1$ și $n < x < n + 1$ avem $a^x > 1 + n > x$.

2. Funcția logaritmică

Funcția $f(x) = \log_a x$, $x \in (0, \infty)$ $(a > 0, a \neq 1)$, se numește funcție logaritmică. Funcția $\log_a x$ este inversa funcției exponențiale a^x; prin urmare, pentru $0 < a < 1$, $\log_a x$ este descrescătoare (fig. 59),

x	0		a		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

iar pentru $a > 1$, este crescătoare (fig. 60),

x	0		1		a		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

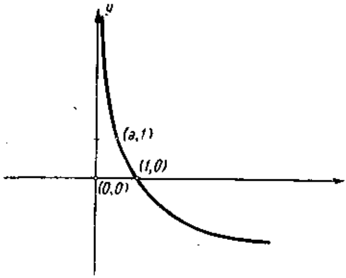


Fig. 59

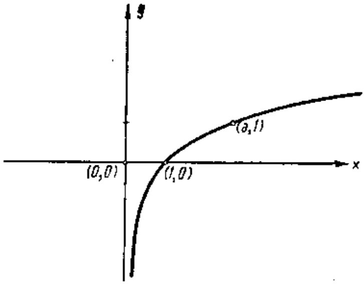


Fig. 60

Exercițiu

Avem $a^{\log_a u} = u$. Într-adevăr, dacă luăm logaritmii în baza a, obținem $\log_a u = \log_a u$

§ 3. FUNCȚII HIPERBOLICE FUNCȚII HIPERBOLICE ȘI CIRCULARE INVERSE

1. Funcții hiperbolice

a) **Funcția** sh x, $x \in R$, numită „sinus hiperbolic", se definește cu ajutorul funcției exponențiale e^x în modul următor

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in R.$$

Domeniul valorilor este $(-\infty, +\infty)$. Funcția sh x este o funcție impară, deoarece sh $(-x) = -$ sh x.

Graficul este simetric față de originea axelor, (fig. 61),

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) **Funcția** ch x, $x \in R$, numită „cosinus hiperbolic", este definită de

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in R.$$

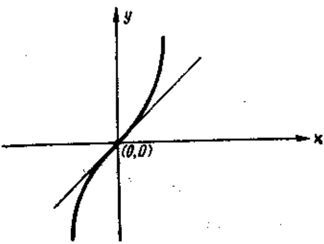


Fig. 61

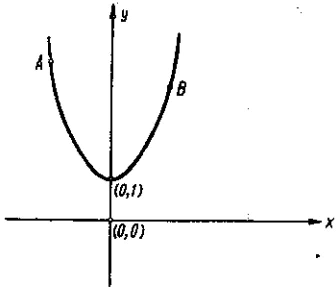


Fig. 62

Domeniul valorilor este $[1, +\infty)$. Funcția ch$x$ este o funcție pară, deoarece ch $(-x) =$ ch$x$. Graficul este simetric față de axa oy. Graficul funcției ch$x$ se numește și *curba lănțișor*. Curba $y =$ ch x dă poziția de echilibru a unui fir omogen, flexibil, inextensibil, supus la acțiunea gravitații și ale cărui capete sînt fixate (fig. 62).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) **Funcția** th x, $x \in R$, numită „tangentă hiperbolică", (fig. 63), este definită de

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

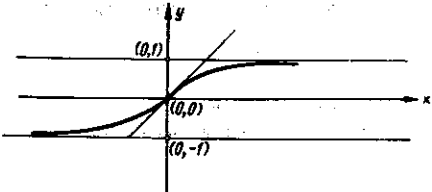


Fig. 63

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$

d) **Funcția** cth x, $x \in R - \{0\}$, numită „cotangenta hiperbolică", (fig. 64), este definită de

$$\text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} =$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

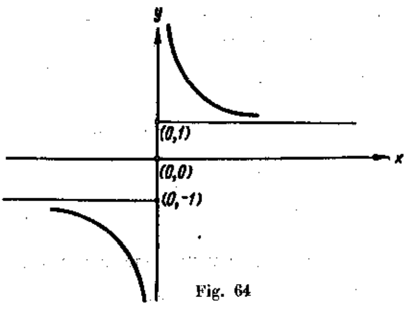


Fig. 64

x	$-\infty$		0			$+\infty$
y	-1	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$		$\searrow$	1

2. Proprietăţile funcţiilor hiperbolice

Funcţiile hiperbolice au proprietăţi care le apropie de funcţiile circulare. Dăm cîteva din ele:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

2) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

3) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$;

4) $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$;

5) $\operatorname{cth}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}$;

toate se dovedesc înlocuind funcţiile hiperbolice cu expresiile lor în funcţie de exponenţiale. Astfel, pentru 1 avem

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2\right) = 1.$$

3. Funcţii hiperbolice inverse

a) **Funcţia** sh x este strict monotonă pe tot domeniul său de definiţie R. Avem

$$\operatorname{sh} x = y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

sau

$$e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2}.$$

Soluţia care convine este

$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2}.$$

Schimbînd pe y în x după logaritmare, obţinem funcţia inversă a funcţiei sh x

$$\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),$$

numită „argument sinus hiperbolic". Graficul se obţine din figura 61 prin simetrie faţă de prima bisectoare.

b) **Funcţia** ch x este strict monotonă pe intervalele $(-\infty, 0]$ şi $[0, +\infty)$. Avem

$$\operatorname{ch} x = y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

sau

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Schimbînd pe y cu x, obținem funcția inversă a funcției ch x numai pentru ramura monotonă definită pe $[0, +\infty)$

$$\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{argch} x = \ln(\sqrt{x^2-1}+x),\ x \in [1, +\infty),$$

numită „argument cosinus hiperbolic"; pentru ramura din intervalul $[-\infty, 0]$ avem

$$\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{argch} x = -\ln(\sqrt{x^2-1}+x),\ x \in [1, +\infty).$$

Graficul celor două funcții se obține din figura 62, prin simetrie față de prima bisectoare.

c) **Funcția** th x, $x \in R$, este strict monotonă pe tot intervalul de definiție. Avem

$$\operatorname{th} x = y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},$$

deci

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

sau

$$\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x \in (-1, +1),$$

numită „argument tangentă hiperbolică". Graficul se obține din figura 63, prin simetrie față de prima bisectoare.

d) **Funcția** cth x, $x \in R - \{0\}$, este strict monotonă pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$. Avem

$$\operatorname{cth} x = y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1},$$

deci

$$e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}.$$

Schimbînd pe y cu x, obținem funcția inversă a funcției cth x, pentru ramura monotonă definită pe $(-\infty, 0)$,

$$\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{argcth} x = -\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\quad x \in (-\infty, -1),$$

numită „argument cotangentă hiperbolică"; pentru ramura din intervalul $(0, +\infty)$ avem

$$\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{argcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\quad x \in (1, +\infty).$$

Graficul celor două funcții se obține din figura 64, prin simetrie față de prima bisectoare.

4. Funcții circulare inverse

1) **Funcția** $f\ (x) = \sin\ x$ este strict monotonă pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deci pe acest interval se poate inversa

$$f(x) = \text{Arc}\sin\ x,\ \ x \in [-1, +1].$$

Graficul funcției Arc sin x se obține din graficul funcției sin x, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, prin simetrie față de prima bisectoare (fig. 65).

Funcția Arcsin x are graficul simetric față de origine, deci este o funcție impară.

Observație

Funcția $f_k\ (x) = \sin x$, $x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, k întreg se poate inversa în intervalul de definiție $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ și funcția inversă se notează arc sin x. Funcția Arc sin x se numește *determinarea principală* a funcției arc sin x.

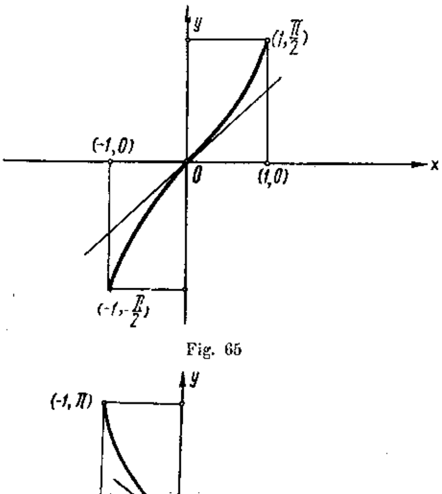


Fig. 65

2) **Funcția** $f\,(x) = \cos x$ este strict monotonă pe intervalul $[0, \pi]$, deci pe acest interval se poate inversa

$$f^{-1}\,(x) = \text{Arccos}\ x,$$

$$x \in [-1, +1].$$

Graficul funcției Arc cos x se obține din graficul funcției $\cos x$, $x \in [0,\ \pi]$, prin simetrie față de prima bisectoare (fig. 66).

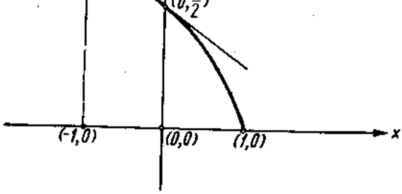


Fig. 66

Observație

Funcția $f_k\ (x) = \cos\ x$, $x \in [k\pi,\ k\pi + \pi]$, k întreg,

se poate inversa pe intervalul de definiție și funcția inversă se notează arc cos x. Funcția Arccos x se numește *determinarea principală* a funcției arc cos x.

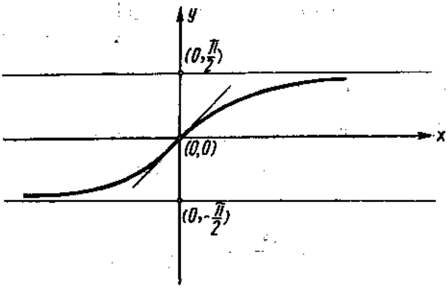


Fig. 67

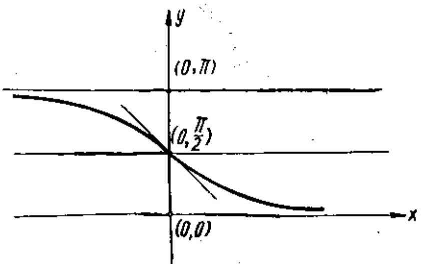


Fig. 68

3) **Funcția** $f(x) = \operatorname{tg} x$ este strict monotonă pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci pe acest interval se poate inversa

$$\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{Arc\,tg} x,$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Observație

Funcția $f_k(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, k întreg, se poate inversa pe intervalul de definiție și funcția inversă se notează arctg x. Funcția Arctg x se numește *determinarea principală* a funcției arctg x.

4) **Funcția** $f(x) = \operatorname{ctg} x$ este strict monotonă pe intervalul $(0, \pi)$, deci pe acest interval se poate inversa

$$\overset{-1}{f}(x) = \operatorname{Arc\,ctg} x,$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Observație

Funcția $f_k(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in (k\pi, k\pi + \pi)$, k întreg, se poate inversa pe intervalul de definiție și funcția inversă se notează arc ctg x. Funcția Arc ctg x se numește *determinarea principală* a funcției arc ctg x.

Capitolul IV

DERIVATE ŞI DIFERENŢIALE

§ 1. DERIVATA

1. Funcţii derivabile

Fie f o funcţie definită pe un interval I şi x_0 un punct din I.

D e f i n i ţ i e. Se spune că funcţia $f: I \to R$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ dacă raportul

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

are în punctul x_0 limită finită. Limita însăşi se numeşte derivata funcţiei f în punctul x_0 şi se notează $f'(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \tag{1}$$

$f'(x_0)$ se citeşte „derivata funcţiei f în raport cu x în punctul x_0".

În loc de $f'(x_0)$ se mai folosesc pentru derivată şi notaţiile

$$\frac{df(x_0)}{dx}, \quad Df(x_0), \; f'_x(x_0).$$

Dacă limita $f'(x_0)$ există, însă este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), spunem că derivata funcţiei în punctul x_0 este infinită. În această situaţie însă, funcţia nu este derivabilă în punctul x_0.

O b s e r v a ţ i i

1) Din cele de mai sus rezultă că funcţia trebuie să fie definită în punctul x_0. Dacă o funcţie nu este definită într-un punct, nu se pune problema derivabilităţii în acel punct.

2) Derivata într-un punct este un număr.

Exemple

1) Pentru funcția ln $(1+x)$ nu are sens problema derivabilității în punctul $x=-1$, deoarece funcția nu este definită în punctul $x=-1$.

2) Funcția $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,\infty)$, nu este derivabilă în punctul $x=0$, deoarece în acest punct derivata este infinită:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Teoremă. Dacă funcția $f: I\to R$ este derivabilă în punctul $x_0\in I$, atunci f este continuă în punctul x_0.

Demonstrație. Pentru $x\neq x_0$, $x\in I$ avem egalitatea

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

și

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\quad \text{(finit)},$$

de unde rezultă că $f(x)$ are limita în punctul x_0 pe $f(x_0)$.

Într-adevăr,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f(x_0),$$

deci $f(x)$ este continuă în punctul x_0.

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. O funcție continuă într-un punct $x_0\in I$ nu este cu necesitate derivabilă în punctul x_0.

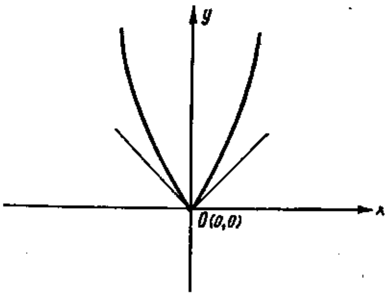


Fig. 69

Exemple

1) Funcția $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

nu este derivabilă în punctul $x=0$, deoarece

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

și $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ nu există.

2) Funcția $f(x)=|x|+x^2$, continuă pe R, nu este derivabilă în punctul $x=0$ (fig. 69),

avem $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{|x|+x^2}{x}\to\begin{cases}+1, & x\to 0,\ x>0\\ -1, & x\to 0,\ x<0\end{cases}$

2. Interpretarea geometrică a derivatei

Fie $f: I \to R$ şi G_f graficul funcţiei f pentru $x \in I$,

$$G_f = \{x, f(x) \mid x \in I\},$$

care este un arc de curbă plană. Dacă $x_0 \in I$ este un punct în care funcţia f este derivabilă, iar x un punct oarecare din interval, conform figurii 70, avem din triunghiul M_0MN,

$$\text{tg } \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (1)$$

unde tg α este coeficientul unghiular al secantei M_0M. Dacă punctul $M \to M_0$, secanta M_0M se apropie ca poziţie de dreapta M_0Q, tangenta la grafic în punctul M_0 (dacă graficul are o tangentă unică în punctul M_0), deci

$$\lim_{M \to M_0} \text{tg } \alpha = \lim_{M \to M_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{tg } \theta.$$

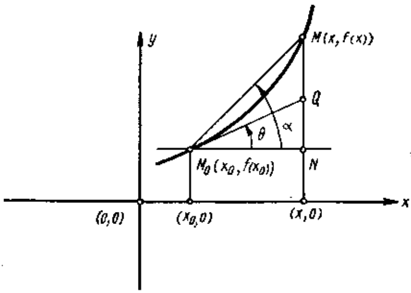


Fig. 70

Prin urmare, derivata funcţiei $f(x)$, $x \in I$, într-un punct $x_0 \in I$ este egală cu tangenta trigonometrică a unghiului pe care îl face tangenta la grafic în punctul $(x_0, (f(x_0))$ cu axa Ox.

Dacă derivata este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), $\theta = \frac{\pi}{2}$, dreapta M_0Q este paralelă cu axa Oy.

Dacă raportul (1) nu are limită, graficul G_f nu are tangenta unică în punctul M_0 (punct unghiular) sau tangenta nu există.

3. Interpretarea cinematică a derivatei

Fie M un punct mobil care descrie axa Ox. La fiecare moment t, drumul parcurs pe axă este o funcţie $x(t)$ care ne dă legea de mişcare a punctului. Punctul se mişcă uniform dacă legea de mişcare este dată de relaţia liniară în t

$$x(t) = x_0 + v_0 t, \quad x_0 = x(t_0), \quad v_0, \text{ constante.}$$

Spaţiul parcurs între două momente oarecare $t_1 < t_2$ este

$$x(t_2) - x(t_1) = v_0(t_2 - t_1)$$

și raportul

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = v_0$$

se numește *viteza* punctului M în mișcarea rectilinie și uniformă.

Prin urmare, într-o mișcare rectilinie și uniformă viteza este constantă.

Fie acum o mișcare oarecare a punctului M pe axa Ox, mișcare dată de legea $x(t)$, și să considerăm două momente t_1, t_2, precum și raportul

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{1}$$

Dacă substituim mișcării date, în intervalul (t_1, t_2), o mișcare uniformă a unui alt punct, care coincide cu punctul M la timpul t_1 și t_2, raportul (1) poate fi considerat ca *viteza medie* a punctului M în intervalul de timp (t_1, t_2) și el ne dă o caracterizare a mișcării între aceste momente, caracterizare care va fi cu atît mai bună cu cît intervalul (t_1, t_2) este mai mic. Sîntem astfel conduși a considera limita vitezei medii cînd $t_2 \to t_1$, adică

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Dacă această limită există și este finită, ea este prin definiție viteza punctului M la momentul t_1, deci

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

4. Funcții derivabile pe un interval

Definiție. Se spune că funcția $f : I \to R$ este derivabilă pe I dacă este derivabilă în fiecare punct $x \in I$.

Funcția $f' : I \to R$ care face ca fiecărui punct $x \in I$ să-i corespundă derivata funcției în punctul x, $f'(x)$ se numește funcția derivată a funcției f sau, mai simplu, *derivata lui* f și se notează

$$f', \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \text{ sau } \mathrm{D}f.$$

Cu ajutorul acestor notații, derivata funcției într-un punct x_0, $f'(x_0)$ se mai scrie

$$(f'(x))_{x=x_0}, \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}, \quad (\mathrm{D}f(x))_{x=x_0}.$$

Exemple

1) Funcţia $f(x) = c$, $x \in R$, este derivabilă pe R şi $f'(x) \equiv 0$. Într-adevăr

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0, \ x \neq x_0,$$

deci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, pentru orice $x_0 \in R$.

2) Funcţia $f(x) = ax$, $x \in R$, este derivabilă pe R şi $f'(x) \equiv a$. Într-adevăr

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = a,$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a, \text{ pentru orice } x_0 \in R.$$

3) Funcţia $f(x) = ax^n$, $x \in R$, $n \in N$, este derivabilă pe R şi $f'(x) = na\, x^{n-1}$. Într-adevăr

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = a\,(x^{n-1} + x_0\, x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-2}\, x + x_0^{n-1}),$$

deci pentru orice $x_0 \in R$ avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = nax_0^{n-1}.$$

4) Funcţia $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, $x \in R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, este derivabilă.

Avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}\right) = \frac{ad - bc}{(cx + d)(cx_0 + d)}$$

şi pentru orice $x_0 \neq -\frac{d}{c}$

$$f'(x_0) = \frac{ad - bc}{(cx_0 + d)^2}.$$

5. Derivata la dreapta. Derivata la stînga

D e f i n i ţ i e. Fie funcţia $f: I \to R$ şi $x \in I$. Se spune că funcţia f este derivabilă la dreapta în punctul x_0 dacă raportul

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x > x_0, \quad x \in I$$

are limita la dreapta în punctul x_0. Această limită se numește derivata la dreapta a funcției f în punctul x_0 și se notează $f'_d(x_0)$:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definiție. Fie funcția $f: I \to R$, $x_0 \in I$. Se spune că funcția f este derivabilă la stînga în punctul x_0 dacă raportul

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x < x_0, \quad x \in I$$

are limita la stînga în punctul x_0. Această limită se numește derivata la stînga a funcției f în punctul x_0 și se notează $f'_s(x_0)$:

$$f'_s(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Observații

1) Din definiție rezultă că o funcție este derivabilă într-un punct x_0 dacă este derivabilă la dreapta și la stînga în punctul x_0 și dacă cele două derivate (numite *derivate laterale*) sînt egale

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

2) Pentru o funcție definită pe un interval compact (închis și mărginit) $[a, b]$ are sens problema derivatei în orice punct din interval. În punctul a are sens problema derivatei la dreapta, iar în punctul b are sens problema derivatei la stînga.

3) Dacă derivata la dreapta (sau la stînga) a unei funcții f într-un punct x_0 este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), funcția nu este derivabilă la dreapta (sau la stînga) în punctul x_0.

Exemple

1) Funcția $f(x) = |x| + 1$ este derivabilă pe $R - \{0\}$; în punctul $x = 0$ are derivate laterale diferite (fig. 71).

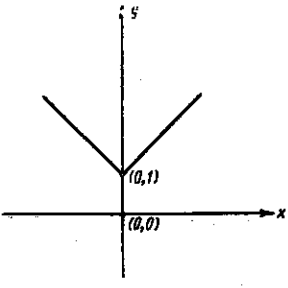


Fig. 71

Avem pentru $x_0 \in R - \{0\}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \begin{cases} 1, & x_0 > 0 \\ -1, & x_0 < 0 \end{cases}$$

În punctul $x_0 = 0$ avem

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} \to \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \to 0+ \\ -1, & \text{dacă } x \to 0- \end{cases}$$

deci

$$f'_d(0) = 1, \ f'_s(0) = -1.$$

2) Funcția $f(x) = \sqrt{1 + x}$, $x \geq -1$, are în punctul $x = -1$ derivata la dreapta infinită. Problema derivatei la stînga în punctul $x = -1$ nu are sens, deoarece funcția nu este definită pentru $x < -1$.

Avem

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{\sqrt{1+x}}{x+1}=\frac{1}{\sqrt{1+x}},\quad x>-1,$$

$$\lim_{x\to -1+}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=+\infty,\quad \text{deci } f'_d(-1)=+\infty.$$

În orice punct $x_0>-1$ avem

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x_0}}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\cdot\frac{1+x-(1+x_0)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x_0}},$$

deci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{2\sqrt{1+x_0}}.$$

6. Interpretarea geometrică a derivatei la dreapta și a derivatei la stînga

a) O funcție $f: I\to R$ este derivabilă la dreapta în punctul $x_0\in I$ dacă

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_d(x_0).$$

Prin urmare, conform figurii 72, semidreapta M_0M cînd $M\to M_0$ (M la dreapta lui M_0) se apropie ca poziție de semitangenta la dreapta în punctul M_0, M_0Q.

Coeficientul unghiular al semidreptei M_0Q este $f'_d(x_0)$.

Dacă $f'_d(x_0)=+\infty$, semitangenta M_0Q este paralelă cu axa Oy și este situată deasupra punctului M_0 (fig. 73).

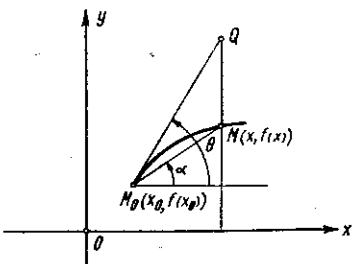


Fig. 72

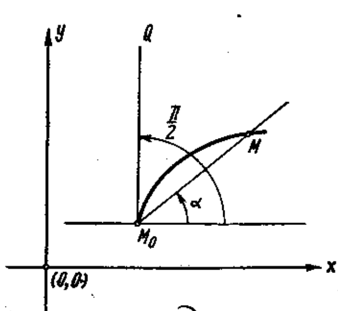


Fig. 73

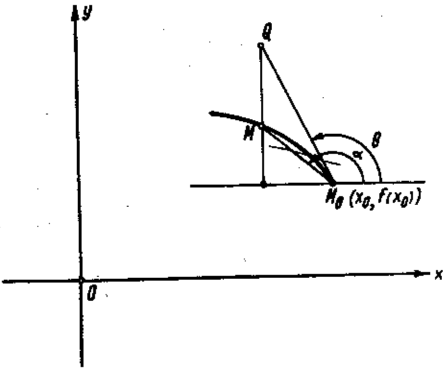


Fig. 74

Dacă $f'_d(x_0) = -\infty$, semidreapta M_0Q, semitangentă la grafic în punctul x_0, este paralelă cu axa Oy și este situată sub punctul M_0.

b) O funcție $f: I \to R$ este derivabilă la stînga în punctul x_0 dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_s(x_0)$. Prin urmare, conform figurii 74, semidreapta M_0M

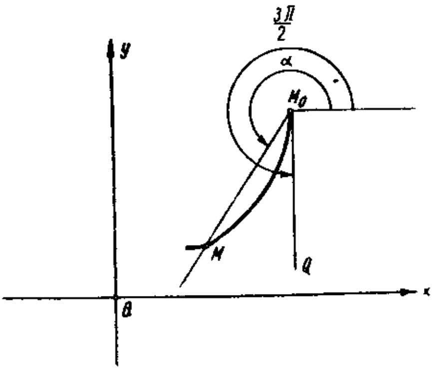


Fig. 75

cînd $M \to M_0$ (M la stînga lui M_0) se apropie ca poziție de semitangenta la stînga în punctul M_0, M_0Q. Coeficientul unghiular al semidreptei M_0Q este $f'_s(x_0)$. Dacă $f'_s(x_0) = +\infty$, semitangenta M_0Q este paralelă cu axa Oy și este situată sub punctul M_0 (fig. 75).

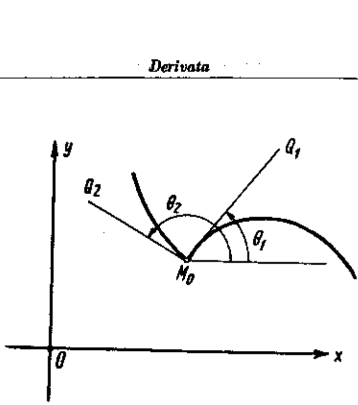


Fig. 76

Dacă $f'_s(x_0) = -\infty$, semitangenta M_0Q este paralelă cu axa Oy și este situată deasupra punctului M_0.

c) Dacă funcția f are în punctul x_0 derivate laterale diferite și cel puțin una din ele este finită, punctul x_0 se numește *punct unghiular* al graficului funcției $f(x)$, iar cele două semitangente fac între ele un unghi $\neq \pi$ și $\neq 2\pi$ (fig. 76 și 77).

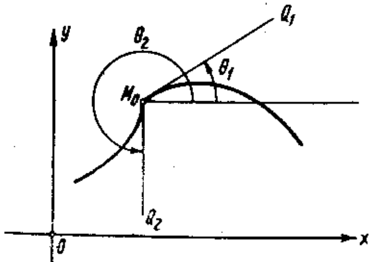


Fig. 77

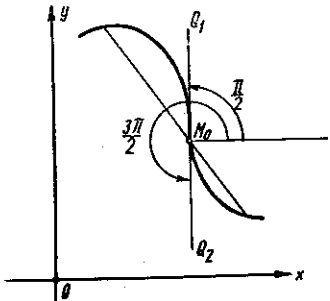


Fig. 78

d) Dacă funcția f are în punctul x_0 derivate laterale infinite și egale, cele două semitangente sînt în prelungire; punctul x este un *punct de inflexiune* al graficului funcției $f(x)$ (fig. 78).

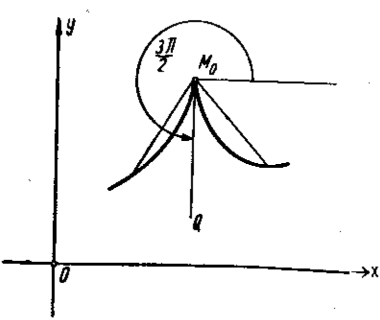


Fig. 79

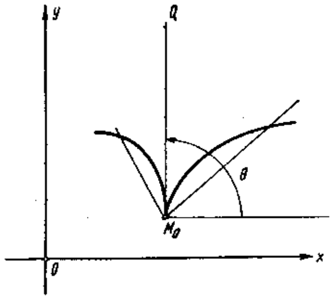


Fig. 80

e) Dacă funcția f are în punctul x_0 derivate laterale infinite și diferite $[f'_d(x_0) = \infty,\ f'_s(x_0) = -\infty$ sau $f'_d(x) = -\infty,\ f'(x_0) = +\infty]$, cele două semitangente se suprapun; punctul x_0 se numește punct de întoarcere al graficului funcției $f(x)$ (fig. 79 și 80).

§ 2. REGULI DE DERIVARE

1. Operații cu funcții derivabile

T e o r e m a 1. Dacă funcțiile $f(x)$ și $g(x)$, $x \in I$ sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcția $f(x) + g(x)$, $x \in I$ este derivabilă în punctul x_0 și

$$[f(x) + g(x)]'_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demonstrație:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

și, pentru că f și g sînt derivabile în punctul x_0, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0), \tag{1}$$

deci

$$[f(x) + g(x)]'_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0). \tag{2}$$

Observaţii

1) Teorema rămîne adevărată pentru suma unui număr finit de funcţii derivabile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ într-un punct x_0, şi anume

$$[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]'_{x=x_0} = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \ldots + f_n'(x_0).$$

2) Regula (2) rămîne adevărată şi în cazul cînd derivatele $f'(x_0)$ şi $g'(x_0)$ sînt infinite, cu condiţia ca suma $f'(x_0) + g'(x_0)$ să aibă sens.

Consecinţă. Dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$, $x \in I$ sînt derivabile pe I, atunci suma $f(x) + g(x)$ este derivabilă pe I şi

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),\ x \in I.$$

Teorema 2. Dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$, $x \in I$ sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcţia $f(x) - g(x)$ este derivabilă în punctul x_0 şi

$$[f(x) - g(x)]'_{x=x_0} = f'(x_0) - g'(x_0).$$

Demonstraţie. Avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x) - f(x_0) + g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

şi pentru că $f(x)$ şi $g(x)$ sînt derivabile în punctul x_0 obţinem

$$[f(x) - g(x)]'_{x=x_0} = f'(x_0) - g'(x_0). \tag{3}$$

Observaţie

1) Regula (3) rămîne valabilă şi în cazul cînd derivatele $f'(x_0)$ şi $g'(x_0)$ sînt infinite, cu condiţia ca diferenţa $f'(x_0) - g'(x_0)$ să aibă sens.

Consecinţă. Dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$, $x \in I$ sînt derivabile pe I, atunci diferenţa $f(x) - g(x)$ este derivabilă pe I şi

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x), \quad x \in I.$$

Teorema 3. Dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$, $x \in I$ sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$, atunci funcţia $f(x) \cdot g(x)$ este derivabilă în punctul x_0 şi

$$[f(x)\, g(x)]'_{x=x_0} = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

Demonstraţie. Pentru $x \neq x_0$ din I avem

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} +$$

$$+ f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Prin ipoteză, funcţiile f şi g sînt derivabile în punctul x_0, deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0),$$

iar $g(x)$ și $f(x)$ sînt continue în punctul x_0; prin urmare, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, astfel încît putem scrie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)\,f'(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0),$$

adică

$$[f(x)\,g(x)]'_{x=x_0} = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0). \tag{4}$$

Dacă $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, $x \in I$ sînt n funcții derivabile în punctul x_0, produsul lor $f_1(x)\,f_2(x)\ldots f_n(x)$ este derivabil în punctul x_0 și

$$[f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)]'_{x=x_0} = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_0)\ldots f_{k-1}(x_0)f'_k(x_0)f_{k+1}(x_0)\ldots f_n(x_0). \tag{5}$$

Demonstrație. Pentru $n = 2$ formula este adevărată, deoarece este formula (4). Presupunem că este adevărată pentru $n - 1$; să arătăm că este adevărată și pentru n:

$$[f_1(x)f_2(x)\ldots f_{n-1}(x)f_n(x)]'_{x=x_0} = [f_1(x_0)\,f_2(x_0)\ldots f_{n-1}(x_0)]\cdot f'_n(x_0) +$$

$$+ f_n(x_0)\,[f_1(x)\,f_2(x)\ldots f_{n-1}(x)]'_{x=x_0} = f_1(x_0)\,f_2(x_0)\ldots f_{n-1}(x_0)f'_n(x_0) +$$

$$+ f_n(x_0)\sum_{k=1}^{n-1} f_1(x_0)\ldots f_{k-1}(x_0)\,f'_k(x_0)\,f_{k+1}(x_0)\ldots f_{n-1}(x_0),$$

care este tocmai formula (5).

În particular, dacă $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$, atunci

$$(f^n(x))'_{x=x_0} = n f^{n-1}(x_0)\,f'(x_0).$$

Consecință. Dacă funcțiile $f(x)$ și $g(x)$, $x \in I$ sînt derivabile pe intervalul I, atunci funcția $f(x)\,g(x)$ este derivabilă pe I și

$$[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x), \quad x \in I.$$

Aplicație

Să considerăm determinantul de ordinul n

$$D_n(x) = |f_{ij}(x)|, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

cu elementele $f_{ij}(x)$ funcții derivabile pe aceeași mulțime I. Ne propunem să calculăm derivata $D'_n(x)$. Avem

$$D_n(x) = \sum_{\alpha} (-1)^I f_{1\alpha_1}(x)f_{2\alpha_2}(x)\ldots f_{n\alpha_n}(x),$$

deci

$$D'_n(x) = \sum_{\alpha} (-1)^I f'_{1\alpha_1}(x)f_{2\alpha_2}(x)\ldots f_{n\alpha_n}(x) + \sum_{\alpha} (-1)^I f_{1\alpha_1}(x)f'_{2\alpha_2}(x)\ldots f_{n\alpha_n}(x) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{\alpha} (-1)^I f_{1\alpha_1}(x)f_{2\alpha_2}(x)\ldots f_{n-1\,\alpha_{n-1}}(x)\,f'_{n\alpha_n}(x), \qquad x \in I,$$

deci

$$D_n'(x) = \begin{vmatrix} f_{11}'(x) & f_{12}'(x) & \dots & f_{1n}'(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}'(x) & f_{22}'(x) & \dots & f_{2n}'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}'(x) & f_{n2}'(x) & \dots & f_{nn}'(x) \end{vmatrix}$$

adică D_n' este suma a n determinanți D_k, $k = 1, 2, \dots, n$. D_k se obține din D_n, înlocuind elementele liniei k cu derivatele lor $f_{k1}'(x), f_{k2}'(x), \dots, f_{kn}'(x)$ și lăsînd toate celelalte linii neschimbate.

Teorema 4. Dacă funcțiile $f(x)$ și $g(x)$, $x \in I$ sînt derivabile într-un punct $x_0 \in I$ și $g(x_0) \neq 0$, atunci funcția $\frac{f(x)}{g(x)}$ este derivabilă în punctul x_0 și

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]_{x=x_0}' = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - g'(x_0)\,f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrație. Funcția $g(x)$ ia în punctul x_0 o valoare diferită de zero; deoarece este continuă în punctul x_0, există o vecinătate V a lui x_0 în care $g(x) \neq 0$, $x \in V$. Pentru $x \in V$ avem

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \cdot \frac{f(x)\,g(x_0) - g(x)\,f(x_0)}{g(x)\,g(x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\,g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0)) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\,g(x_0)}\left[g(x_0)\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right],$$

însă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

și

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)}, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

deci avem, la limită,

$$\lim_{x \to x} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - g'(x_0)\,f(x_0)}{g^2(x_0)},$$

adică

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - g'(x_0)\,f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Consecință. Dacă funcțiile $f(x)$ și $g(x)$, $x \in I$ sînt derivabile pe I și $g(x) \neq 0$, $x \in I$, atunci $\frac{f(x)}{g(x)}$ este derivabilă pe I și

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{g^2(x)}, \quad x \in I.$$

Exemple

1) Polinomul $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ este derivabil pentru orice $x \in R$ și

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

2) Funcția rațională $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P(x)$ și $Q(x)$ sînt polinoame, este definită pentru orice $x \in R$, cu excepția punctelor care anulează numitorul. Funcția $R(x)$ este derivabilă în orice punct al domeniului de definiție

$$R'(x) = \frac{P'(x)\,Q(x) - P(x)\,Q'(x)}{Q^2(x)}.$$

2. Derivabilitatea funcțiilor compuse

Să considerăm funcția $u(x)$, $x \in I$ cu domeniul valorilor J și funcția $f(u)$, $u \in J$; pentru funcția compusă $F(x) = f(u(x))$, $x \in I$ avem următoarea

Teoremă. Dacă funcția $u(x)$, $x \in I$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și funcția $f(u)$ este derivabilă în punctul corespunzător $u_0 = u(x_0) \in J$, atunci funcția compusă $F(x) = f(u(x))$, $x \in I$ este derivabilă în punctul x_0 și

$$F'(x_0) = f'(u(x_0))\,u'(x_0).$$

Demonstrație. Funcția u fiind derivabilă în punctul x_0, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0). \tag{1}$$

Funcția $f(u)$ fiind derivabilă în punctul u_0,

$$\lim_{u \to u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} = f'(u_0).$$

Înainte de a trece la limită putem scrie

$$\frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} = f'(u_0) + \alpha(u), \tag{2}$$

cu

$$\lim_{u \to u_0} \alpha(u) = 0. \tag{3}$$

Funcția $\alpha(u)$ dată de (2), cu $\alpha(u_0) = 0$, este continuă în punctul u_0. Într-adevăr

$$|\alpha(u)| = \left| \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} - f'_s(u_0) \right|$$

și pentru $|u - u_0| < \eta$ avem

$$|\alpha(u)| < \varepsilon,$$

deoarece $f(u)$ este derivabilă în punctul u_0.

Să revenim acum la derivabilitatea funcției $F(x)$:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(u)(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} = \frac{(u(x) - u(x_0))(f'(u_0) + \alpha(u))}{x - x_0} =$$

$$= f'(u_0)\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \alpha(u)\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0},$$

deci la limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f'(u_0) \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \alpha(u) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

și dacă ținem seama de (1) și (3)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f'(u_0)\, u'(x_0) = F'(x_0).$$

Consecință. Dacă funcția $u: I \to J$ este derivabilă pe I și funcția f este derivabilă pe J, atunci funcția compusă $f(u(x))$, $x \in I$ este derivabilă pe I și

$$[f(u(x))]' = f'(u)\, u'(x), \quad x \in I.$$

3. Derivabilitatea funcțiilor inverse

Teoremă. Fie funcția $f(x)$, $x \in I$, care se poate inversa pe I. Dacă $f(x)$ este derivabilă în punctul x_0 și $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția sa inversă $\overset{-1}{f}(y)$, $y \in J$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0) \in J$ și

$$\overset{-1}{f'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{1}$$

Demonstrație. Am arătat că funcția $\overset{-1}{f}$ este continuă pe J (B, cap. II, § 4, al. 3); rămîne să mai arătăm că pentru orice șir $y_n \to y_0$ (y_n, $y_0 \in J$)

$$\frac{\overset{-1}{f}(y_n)-\overset{-1}{f}(y_0)}{y_n - y_0} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Funcția f fiind biunivocă, la $y_n \in J$ corespunde un x_n astfel încît $y_n = f(x_n)$, deci $x_n = \overset{-1}{f}(y_n)$, astfel încît

$$\frac{\overset{-1}{f}(y_n)-\overset{-1}{f}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}},$$

și la limită, deoarece șirul y_n este arbitrar,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\overset{-1}{f}(y)-\overset{-1}{f}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

C o n s e c i n ț ă. **Dacă funcția $f(x)$, $x \in I$, este derivabilă pe I și $f'(x) \neq 0$, atunci funcția inversă $\overset{-1}{f}$ este derivabilă pe J ($J = \{y \mid y = f(x),\ x \in I\}$ și**

$$\overset{-1}{f}{}'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y \in J, \quad x \in I,$$

unde $y = f(x)$ și $x = \overset{-1}{f}(y)$.

O b s e r v a ț i i

1) Am arătat (B cap. II, § 1, al. 4) că funcțiile $y = \overset{-1}{f}(x)$ și $y = f(x)$ au graficele simetrice față de prima bisectoare a axelor. Relația dintre derivatele lor în punctele corespunzătoare

$$\overset{-1}{f}{}'(y)\, f'(x) = 1$$

confirmă acest fapt, anume că tangentele la cele două curbe în punctele $(x, f(x))$, $(y, \overset{-1}{f}(y))$ sînt simetrice față de prima bisectoare.

2) Dacă $f'(x_0) = 0$, relația (1) se menține, anume derivata funcției inverse este infinită. Mai precis, dacă $f(x)$ este strict crescătoare, $\overset{-1}{f}{}'(y_0) = +\infty$, deoarece

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

pentru orice $x \neq x_0$ din I, și dacă $f(x)$ este strict descrescătoare, $\overset{-1}{f}{}'(y_0) = -\infty$, deoarece

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

pentru orice $x \neq x_0$ din I.

4. Derivatele funcţiilor trigonometrice

a) **Funcţia cos** x este derivabilă pe domeniul de definiţie R. Avem

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\frac{2\sin\frac{x - x_0}{2}\sin\frac{x + x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0}\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0}\frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0}\sin\frac{x + x_0}{2} = -\sin x_0,\ x_0 \in R,$$

deci $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in R$.

Consecinţă. Dacă $u(x), x \in I$ **este derivabilă, funcţia** $\cos(u(x))$ **este derivabilă pe** I **şi**

$$[\cos(u(x))]' = -u'(x)\sin(u(x)).$$

Exemplu

$$(\cos(x^2 + 1))' = -2x\sin(x^2 + 1).$$

b) **Funcţia sin** x este derivabilă pe domeniul de definiţie R. Deoarece

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

folosind regula de derivare a funcţiilor compuse, precum şi rezultatul precedent, avem

$$(\sin x)' = \cos x,\quad x \in R.$$

c) **Funcţia tg** x este derivabilă pe domeniul de definiţie $R - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, k întreg. Pentru $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, avem

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

d) **Funcţia ctg** x este derivabilă pe domeniul de definiţie $R - \{k\pi\}$, k întreg. Pentru $x \neq k\pi$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

e) **Funcția sec** x este derivabilă pe domeniul de definiție $R - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, k întreg. Pentru $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$(\sec\ x)' = \left(\frac{1}{\cos\ x}\right)' = \frac{\sin\ x}{\cos^2 x}.$$

f) **Funcția cosec** x este derivabilă pe domeniul de definiție $R - \{k\pi\}$, k întreg. Pentru $x \neq k\pi$

$$(\text{cosec}\ x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

5. Derivata funcției logaritmice

Funcția $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) este derivabilă pe tot domeniul de definiție $(0, +\infty)$. Avem

$$\frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} = \log_a \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_a \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}},$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \log_a \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_a e,$$

deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x_0} = 0$. Din formula $\log_a e \cdot \ln a = 1$ rezultă

$$(\log_a x)'_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{\ln a}.$$

Observație

Dacă $u(x) > 0$ și este derivabil pe I, atunci

$$(\ln (u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \qquad x \in I.$$

Exemple

1) $$(\ln (1 + \cos^2 x))' = \frac{-2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x}, \qquad x \in R.$$

2) $$(\ln \ln x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x}, \quad x > 1.$$

6. Derivata funcţiei exponenţiale

Funcţia a^x, $a > 0$, $a \neq 1$ este derivabilă pe tot domeniul de definiţie $(-\infty, +\infty)$.

Funcţia a^x este inversa funcţiei logaritmice $\log_a x$, deci

$$a^x = y, \quad x = \log_a y$$

$$(\log_a y)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{y} \text{ sau } (a^x)' = y \ln a = a^x \ln a.$$

Aşadar,

$$\underline{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Observaţii

1) Dacă $a = e$, $\ln e = 1$, deci

$(e^x)' = e^x$.

2) Dacă $u(x)$ definită pe I este derivabilă pe I, atunci

$$(a^{u(x)})' = u'(x)\, a^{u(x)} \ln a \quad , \quad x \in I. \tag{1}$$

Aplicaţii

1) Funcţia x^α, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 1$, $x \in (0, \infty)$ este derivabilă pentru orice $x \in (0, \infty)$. Avem

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

şi dacă derivăm ca o funcţie de funcţie obţinem

$$(x^\alpha)' = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Dacă $\alpha = 1$, atunci $x^\alpha = x$ şi $(x)' \equiv 1$.

2) Funcţia $u(x)^{v(x)}$, cu $u(x)$, $v(x)$ derivabilă pe I şi $u(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, este derivabilă pe I. Avem

$$u^v = e^{v \ln u}, \qquad (u^v)' = (e^{v \ln u})' = \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right) e^{v \ln u},$$

deci

$$(u^v)' = \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right) u^v.$$

Exemple

1) $(x^x)' = x^x (\ln x + 1)$, $x > 0$, $x \neq 1$.

2) $(\ln x)^{\ln x}$ este derivabilă pentru $x > 1$ şi are derivata

$$(\ln x)^{\ln x} \left[\frac{1}{x} \ln \ln x + \frac{1}{x}\right], \quad x \in (1, +\infty).$$

7. Derivatele funcţiilor hiperbolice

a) **Funcţia sh** x este derivabilă pe domeniul de definiţie R

$$(\text{sh } x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x \quad , \quad x \in R.$$

b) **Funcţia ch** x este derivabilă pe domeniul de definiţie R

$$(\text{ch } x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x \quad , \quad x \in R.$$

c) **Funcţia th** x este derivabilă pe domeniul de definiţie R

$$(\text{th } x)' = \left(\frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}\right)' = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \quad x \in R.$$

d) **Funcţia cth** x este derivabilă pe domeniul de definiţie $R - \{0\}$

$$(\text{cth } x)' = \left(\frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}\right)' = \frac{\text{sh}^2 x - \text{ch}^2 x}{\text{sh}^2 x} = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}, \quad x \in R - \{0\}.$$

Exerciţii

1) Funcţia $f(x) = \ln |\text{sh } x|$ este derivabilă pe $R - \{0\}$ şi are derivata

$$f'(x) = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} \text{cth } x \quad , \quad x \neq 0.$$

2) Să se calculeze derivata funcţiei $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \text{sh } x}{1 + \text{ch } x}}$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + \text{ch } x}{1 + \text{sh } x}} \cdot \frac{\text{ch } x - \text{sh } x + 1}{(1 + \text{ch } x)^2}, \text{ pentru sh } x + 1 > 0.$$

8. Derivatele funcţiilor circulare inverse

a) **Funcţia Arcsin** x, definită pe $[-1, +1]$, este derivabilă pe $(-1, +1)$

$$y = \text{Arc}\sin x \quad , \quad x = \sin y \quad , \quad (\sin y)' = \cos y,$$

deci

$$(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

În punctele $+1$ sau -1, Arcsin x are derivata $+\infty$.

b) **Funcţia Arccos** x, definită pe $[-1, 1]$, este derivabilă pe $(-1, +1)$

$$y = \text{Arccos } x \quad , \quad x = \cos y \quad , \quad (\cos y)' = -\sin y,$$

deci

$$(\text{Arccos } x)' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

În punctele $+1$ sau -1, Arccos x are derivata $-\infty$.

c) **Funcția Arctg** x, definită pe $(-\infty, +\infty)$, este derivabilă pe domeniul de definiție

$$y = \text{Arctg } x \quad , \quad x = \text{tg } y \quad , \quad (\text{tg } y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tg}^2 y,$$

deci

$$(\text{Arctg } x)' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

d) **Funcția Arc ctg** x, definită pe $(-\infty, +\infty)$, este derivabilă pe domeniul de definiție

$$y = \text{Arctg } x \quad , \quad x = \text{ctg } y \quad , \quad (\text{ctg } y)' = \frac{1}{\sin^2 y} = -(1 + \text{ctg}^2 y),$$

deci

$$(\text{Arctg } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Observații

1) Funcțiile $y_1 = \text{Arcsin } x$ și $y_2 = \text{Arccos } x$ au derivatele egale și de semn contrar. Din $x = \sin y_1$, $x = \cos y_2$, rezultă $\sin y_1 = \cos y_2$, deci $y_1 + y_2 = \frac{\pi}{2}$; prin urmare, suma lor este constantă pentru orice $x \in [-1, +1]$.

2) Funcțiile $y_1 = \text{Arctg } x$ și $y_2 = \text{Arcctg } x$ au derivatele egale și de semn contrar. Din $\text{tg } y_1 = x$, $\text{ctg } y_2 = x$ urmează $\text{tg } y_1 = \text{ctg } y_2$, deci $y_1 + y_2 = \frac{\pi}{2}$; prin urmare, suma lor este constantă pentru orice $x \in [-\infty, +\infty]$.

Exercițiu

Derivatele funcțiilor hiperbolice inverse

a) $(\text{argsh } x)' = \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

deci

b) $(\text{argth } x)' = \frac{1}{2}\left[\ln \frac{1+x}{1-x}\right]' = \frac{1}{1-x^2}$, $x \in (-1, +1)$,

în punctele $x = 1$ sau $x = -1$, derivata este $+\infty$.

Derivatele funcțiilor argch x și argcth x se calculează în mod asemănător pentru fiecare ramură.

§ 3. DIFERENȚIALA

1. Definiția deferențialei

Fie o funcție f definită pe un interval I, derivabilă într-un punct $x_0 \in I$. Pentru $x \neq x_0$ putem scrie

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0). \tag{1}$$

Deoarece $f(x)$ este derivabilă în x_0 cu derivata $f'(x_0)$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = f'(x_0),$$

deci $\alpha(x)$ este infinit mic pentru $x - x_0$ infinit mic principal. Din această cauză, pentru valori ale lui x suficient de apropiate de x_0, avem

$$f(x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)(x - x_0) \tag{2}$$

și, dacă notăm $x - x_0 = h$, $x = x_0 + h$, (2) se scrie

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \simeq h f'(x_0).$$

Definiție. Funcția $hf'(x_0)$, $h \in R$, care depinde liniar de h, se numește diferențiala funcției f în punctul x_0 și se notează $\mathrm{d}f(x_0)$, deci

$$\mathrm{d}f(x_0) = hf'(x_0).$$

Observații

1) Diferențiala funcției f, în punctul x_0, este produsul dintre diferențiala funcției $\varphi(x) = x$ și derivata funcției f în punctul x_0; prin urmare, putem defini diferențiala unei funcții într-un punct x_0 dacă și numai dacă funcția f este derivabilă în punctul x_0.

2) Diferențiala $\mathrm{d}f(x_0)$ este funcție liniară de h, pentru orice h real, însă pentru h suficient de mic avem

$$f(x + h) - f(x_0) \simeq h f'(x_0),$$

deci pentru h suficient de mic, *diferențiala funcției aproximează creșterea*

$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

3) Deoarece h este diferențiala funcției $\varphi(x) = x$, $x \in R$, deci $h = \mathrm{d}x$, este obiceiul să se noteze diferențiala funcției $\mathrm{d}f(x_0)$ în modul următor:

$$\underline{\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x,}$$

unde $\mathrm{d}x \in R$ și este *independent de* x. Cu această notație, derivata funcției într-un punct x în care funcția f este derivabilă se scrie

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x),$$

adică derivata $f'(x)$ în punctul x este egală cu raportul constant dintre diferențiala funcției $f(x)$ și diferențiala funcției $\varphi(x) = x$.

2. Interpretarea geometrică a diferenţialei

Din figura 81 rezultă că $MP = f(x_0 + h) - f(x_0)$ şi $QP = f'(x_0) \cdot h$, deci $\alpha(x) = MQ$. Cînd aproximăm creşterea $f(x_0+h) - f(x_0)$ cu $df(x_0) = hf'(x_0)$,

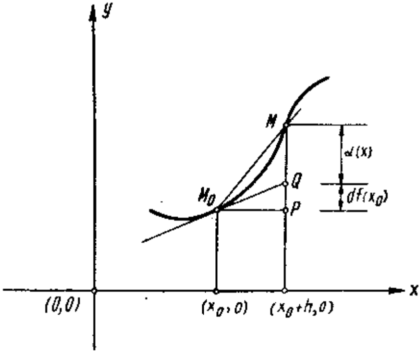


Fig. 81

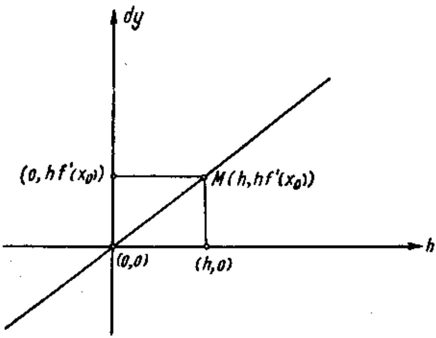


Fig. 82

înlocuim de fapt segmentul MP cu segmentul QP, adică înlocuim în vecinătatea lui x_0 arcul de curbă M_0M cu segmentul de tangentă QM_0.

În planul (h, y), diferenţiala $y = hf'(x_0)$ are graficul o dreaptă ce trece prin originea axelor (fig. 82), dreaptă care are panta $f'(x_0)$.

3. Reguli de calcul pentru diferenţiale

Dacă u şi v sînt două funcţii derivabile pe I, avem:

a) $\mathrm{d}(u+v)=(u'+v')\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$;

b) $\mathrm{d}(u-v)=(u'-v')\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u-\mathrm{d}v$;

c) $\mathrm{d}(uv)=(u'v+v'u)\,\mathrm{d}x=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v$;

d) $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-v'u}{v^2}\,\mathrm{d}x=\frac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}$;

e) $\mathrm{d}\,[f(u(x))]=f'(u)\,u'(x)\,\mathrm{d}x=f'(u)\,\mathrm{d}u$.

Se observă la punctul e că diferenţiala unei funcţii compuse are aceeaşi formă ca şi cum f ar fi funcţie de argumentul u şi u ar fi variabila independentă.

Exemple

1) $\mathrm{d}\cos x=-\sin x\,\mathrm{d}x$

2) $\mathrm{d}\sin x=\cos x\,\mathrm{d}x$

3) $\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

4) $\mathrm{d}\ln(x^2+1)=\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

5) $\mathrm{d}\arcsin(x+1)=\frac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}}\,\mathrm{d}x$

6) $\mathrm{d}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+1}{x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{-\,\mathrm{d}x}{2x^2+2x+1}$.

§ 4. DERIVATE ŞI DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR

1. Derivate de ordin superior

Definiţie. Fie $f\colon I\to R$ o funcţie derivabilă pe o vecinătate V a lui $x_0\in I$ cu derivata $f'(x)$, $x\in V$. Dacă derivata f' este derivabilă în punctul x_0, se spune că f este de două ori derivabilă în punctul x_0.

Derivata lui f' în punctul x_0 se numește derivata a doua (sau de ordinul doi) a funcției f în punctul x_0 și se notează

$$f''(x_0),\ \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2},\ D^2 f(x_0),$$

deci

$$f''(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Observații

1) Pentru ca derivata a doua să existe într-un punct x_0, trebuie ca funcția f să fie derivabilă pe o vecinătate a lui x_0, adică $f'(x)$ *(numită și derivata întîi)* să existe pe o vecinătate a lui x_0.

2) Dacă funcția $f(x)$, $x \in I$ este derivabilă de două ori pe intervalul I, funcția

$$x \to f''(x), \quad x \in I$$

se numește derivata a doua a lui f pe I.

Definiție. Fie $f: I \to R$ o funcție derivabilă de două ori pe o vecinătate V a lui x_0. Dacă f'' este derivabilă în punctul x_0 se spune că f este de trei ori derivabilă în punctul x_0.

Derivata lui f'' în punctul x_0 se numește derivata a treia (sau de ordinul trei) a funcției f în punctul x_0 și se notează

$$f'''(x_0),\ f^{3)}\ (x_0),\ \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3}\ D^3 f(x_0).$$

Exemplu

Să se calculeze derivata a treia a lui arctg x:

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1 + x^2},\quad (\text{arctg } x)'' = \frac{-2}{(1 + x^2)^3}$$

$$(\text{arctg } x)''' = \frac{-2(1 + x^2)^2 + 2x \cdot 4x \cdot (1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3},\quad x \in R.$$

Prin recurență se poate defini derivata de un ordin oarecare $n \in N$.

Definiție. Fie $f: I \to R$ o funcție derivabilă de $n - 1$ ori pe o vecinătate V a lui x_0. Dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă în punctul x_0 se spune că funcția f este de n ori derivabilă în punctul x_0.

Derivata lui $f^{(n-1)}$ în punctul x_0 se numește derivata a n – a (sau de ordinul n) a funcției f în punctul x_0; se notează

$$f^{(n)}\ (x_0), \frac{d^n f(x_0)}{dx^n},\ D^{(n)} f(x_0)$$

și

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Observații

1) Dacă $f: I \to R$ este derivabila de $n-1$ ori pe I și derivata de ordinul n este definită în fiecare punct $x \in I$, atunci funcția

$$x \to f^{(n)}(x), \quad x \in I$$

se numește *derivata de ordinul n* a lui f pe I și se notează

$$f^{(n)}(x), \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \ D^n f(x), \ D(D^{n-1} f(x)), \ x \in I.$$

2) Dacă $f: I \to R$ are derivate *de orice ordin* pe I, se spune că este *indefinit derivabilă* pe I.

2. Exemple de funcții indefinit derivabile

a) **Un polinom** $P(x)$ este o funcție indefinit derivabilă pe R

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}$$

$$P''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

. . . .

$$P^{(n)}(x) = a_n \cdot n!$$

$$P^{(n+1)}(x) = 0.$$

Toate derivatele de ordin superior gradului polinomului sînt identic nule.

b) **Funcția** a^x este indefinit derivabilă pe R

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ (a^x)'' = a^x \ln^2 a, \ \ldots, (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a.$$

c) **Funcția sin** x este indefinit derivabilă pe R

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

și în general

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

d) **Funcția cos** x este indefinit derivabilă pe R

$$(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)'' = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

și în general

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

e) **Funcția ln** $(ax + b)$ este indefinit derivabilă pe $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$

$$(\ln (ax + b))' = \frac{a}{ax + b}$$

$$(\ln (ax + b))'' = -\frac{a^2}{(ax + b)^2}$$

$$(\ln (ax + b))''' = \frac{1 \cdot 2 \cdot a^3}{(ax + b)^3}$$

și în general

$$(\ln (ax + b))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\,a^n}{(ax + b)^n}.$$

3. Formula lui Leibniz

T e o r e m ă. Dacă $u(x)$ **și** $v(x)$ **sînt derivabile de** n **ori pe un interval** I, **atunci produsul** $u(x) \cdot v(x)$ **este de** n **ori derivabil pe intervalul** I **și produsul** $u(x) \cdot v(x)$ **este de** n **ori derivabil pe intervalul** I

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \ldots + C_n^n u \cdot v^{(n)},$$

relație care se numește formula lui Leibniz.

Demonstrație. Formula este adevărată pentru $n = 1$, deoarece avem

$$(uv)' = u' v + v' u.$$

Presupunem că este adevărată pînă la $n - 1$, adică

$$(uv)^{(n-1)} = u^{(n-1)} v + C_{n-1}^1 u^{(n-2)} v' + \ldots + C_{n-1}^{n-1} uv^{(n-1)}. \tag{1}$$

Observăm mai întîi că fiecare din termenii ce intervin conțin pe u și v derivați de ordinul $n - 1$ cel mult. Funcțiile u și v fiind derivabile de n ori pe intervalul I, urmează că fiecare funcție care intervine în dezvoltarea (1) mai este derivabilă cel puțin o dată. Avem deci

$$(uv)^{(n)} = (u^{(n-1)} v)' + (C_{n-1}^1 u^{(n-2)} v')' + \ldots + (C_{n-1}^{n-1} uv^{(n-1)})' =$$

$$= u^{(n)} v + u^{(n-1)} v' + C_{n-1}^1 u^{(n-1)} v' + C_{n-1}^1 u^{(n-2)} v'' + \ldots + C_{n-1}^{n-1} u' v^{(n-1)} +$$

$$+ C_{n-1}^{n-1} uv^{(n)},$$

însă

$$C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1}=C_{n}^{k},$$

deci

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}\,v+C_{n}^{1}\,u^{(n-1)}\,v'+\ldots+C_{n}^{n-1}\,u'\,v^{(n-1)}+C_{n}^{n}\,u\,v^{(n)}$$

și formula este demonstrată.

Exemplu

Să se calculeze derivata de ordinul 100 a funcției $x^3\,e^{ax}$; $(x^3\,e^{ax})^{(100)}=a^{100}\,e^{ax}\,x^3+$

$$+\,C_{100}^{1}\,a^{99}\,e^{ax}\cdot 3x^2+C_{100}^{2}\,a^{98}\,e^{ax}\cdot 6x+6C_{100}^{3}\,a^{97}\cdot e^{ax}.$$

Completări

a) Dacă funcțiile $u(x)$ și $v(x)$ sînt derivabile de n ori pe I, atunci și funcțiile $u+v$, $u-v$, $\frac{u}{v}$, $v(x)\neq 0$, $x\in I$ sînt derivabile de n ori pe I.

Într-adevăr

$$(u+v)'=u'+v',\ (u-v)'=u'-v',\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\,v-v'\,u}{v^2},$$

funcțiile din partea a doua sînt $n-1$ derivabile; asupra lor se efectuează operațiile: adunare, scădere, înmulțire, împărțire, care păstrează derivabilitatea; urmează că sînt derivabile de $n-1$ ori, deci și funcțiile din partea întîi sînt derivabile de $n-1$ ori; prin urmare,

$$u+v,\ u-v,\frac{u}{v},\ (v(x)\neq 0,\ x\in I)\ \text{sînt derivabile de } n \text{ ori pe } I.$$

b) Folosind același principiu al inducției complete, se arată că dacă $\varphi(x)=f(u(x))$ este o funcție compusă $u: I\to J$ și $f: J\to R$ și dacă funcția u este derivabilă de n ori pe I și f este derivabilă de n ori pe J, atunci $\varphi(x)=f(u(x))$ este derivabilă de n ori pe I.

Într-adevăr, avem

$$\varphi'(x)=f'(u(x))\,u'(x),\quad x\in I.$$

Funcțiile $f(u)$ și $u(x)$ fiind n derivabile pe J și I, respectiv, urmează că $f'(u)$ și $u'(x)$ sînt $n-1$ derivabile pe J și I, respectiv, deci și produsul

$$f'(u(x))\cdot u'(x)$$

este derivabil de $n-1$ ori; prin urmare, $\varphi(x)$ este derivabilă de n ori.

Dacă

$$y=f(u(x)),$$

atunci

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{df}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3f}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3+3\,\frac{d^2f}{du^2}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{df}{du}\cdot\frac{d^3u}{dx^3}$$

4. Diferențiale de ordin superior

D e f i n i ț i e. Fie $f: I \to R$ și $x_0 \in I$. Se spune că funcția f este diferențiabilă de două ori în punctul x_0 dacă f este derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0 și dacă $f'(x)$, $x \in V$ este diferențiabilă în punctul x_0. Diferențiala de ordinul doi în x_0 se notează $d^2 f(x_0)$ și se definește prin egalitatea

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)\, dx^2.$$

O b s e r v a ț i e

Împărțind cu dx^2, obținem

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = f''(x_0),$$

care este notația diferențială a derivatei a doua. Prin dx^2 se înțelege $dx \cdot dx$.

D e f i n i ț i e. Fie $f: I \to R$ și $x_0 \in I$. Se spune că funcția f este diferențiabilă de n ori în punctul x_0 dacă f este derivabilă de $n-1$ ori într-o vecinătate V a punctului x_0 și dacă $f^{(n-1)}(x)$, $x \in V$ este diferențiabilă în punctul x_0. Diferențiala de ordinul n în punctul x_0 se notează $d^n f(x_0)$ și se definește prin egalitatea

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\, dx^n.$$

O b s e r v a ț i i

1) Împărțind cu dx^n, obținem

$$\frac{d^n f(x_0)}{dx^n} = f^{(n)}(x_0),$$

care este notația diferențială a derivatei a n − a.

2) Diferențiala de ordinul n este o funcție de dx, și anume este un monom de gradul n în dx.

E x e m p l e

1) Să calculăm diferențiala a doua și a treia a unei funcții compuse

$$\varphi(x) = f(u(x)).$$

Avem

$$d\varphi = f'_u u'\, dx = f'_u\, du$$

$$d^2 \varphi = [f''_{uu} u'^2 + f'_u u'']\, dx^2 = f''_{uu}\, du^2 + f'_u\, d^2 u,$$

din care se deduce că diferențiala a doua este diferențiala diferențialei întîi, deoarece

$$d(f'\, du) = f''\, du \cdot du + f'\, d^2 u = f''\, du^2 + f'\, d^2 u.$$

În mod asemănător

$$d^3 \varphi = [f''' u'^3 + 3 f'' u'^2 u'' + f' u'''] \, dx^3 = f''' \, du^3 + 3 f'' \, du^2 \, d^2u + f' \, d^3u$$

și se verifică imediat că $d^3 \varphi$ este diferențiala diferențialei a doua.

2) $d^n \sin x = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2}\right) dx^n$.

3) $d^n a^x = a^x \cdot \ln^n a \cdot dx^n$.

§ 5. PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR DERIVABILE

1. Maximele și minimele unei funcții

Definiție. Fie $f: I \to R$ și $x_0 \in I$. *a)* Se spune că x_0 este un punct de maxim (local) al funcției f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît să avem

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

b) Se spune că x_0 este un punct de minim (local) al funcției f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît să avem

$$f(x) \geqslant f(x_0) \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

Observație

Punctele de maxim sau minim local se numesc și *puncte de maxim* sau *minim relativ* sau puncte de *extremum relativ*, deoarece un punct de maxim local

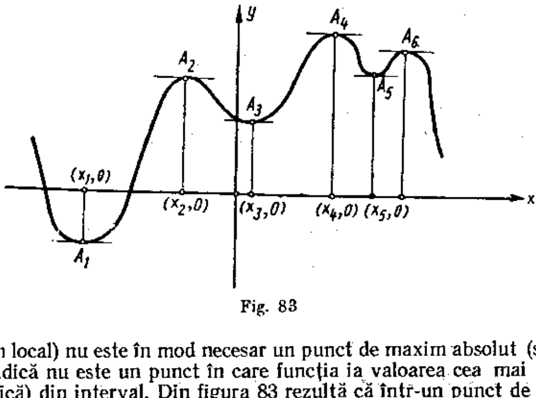


Fig. 83

(sau minim local) nu este în mod necesar un punct de maxim absolut (sau minim absolut), adică nu este un punct în care funcția ia valoarea cea mai mare (sau cea mai mică) din interval. Din figura 83 rezultă că într-un punct de minim relativ valoarea funcției poate fi mai mare decît într-un punct de maxim relativ.

T e o r e m a l u i F e r m a t. **Dacă o funcție $f: I \to R$ are derivată într-un punct x_0 din interiorul intervalului I și dacă x_0 este punct de maxim sau minim local pentru funcția f, atunci derivata sa este nulă în punctul x_0 : $f'(x_0) = 0$.**

Demonstrație Fie x_0 un punct de maxim. Există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru $x \in V$ avem

$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0.$$

Fie acum un șir $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$, $x_n \in V \cap I$; dacă punctul x_0 este interior intervalului I, astfel de șiruri există. Avem în această situație

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geqslant 0$$

și, deoarece f este derivabilă în punctul x_0, rezultă că

$$f'(x_0) \geqslant 0.$$

Să considerăm acum un șir $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$, $x_n \in V \cap I$. Dacă punctul x_0 este interior intervalului I, astfel de șiruri există. Avem în această situație

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant 0,$$

deci, la limită, funcția fiind derivabilă în punctul x_0.

$$f'(x_0) \leqslant 0.$$

Comparînd cele două neegalități, urmează că $f'(x_0) = 0$.

Dacă x_0 este un punct de minim, se procedează în mod asemănător; se observă numai că sensul neegalităților se schimbă.

O b s e r v a ț i i

1) Într-un punct de extremum care nu coincide cu extremitățile graficului, tangenta este paralelă cu axa Ox, deoarece în acel punct derivata este nulă.

2) Dacă punctul x_0 este unul din capetele intervalului I, punctul x_0 poate fi punct de extremum fără ca derivata să se anuleze în punctul x_0.

E x e m p l u

Funcția $f(x) = x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, are un minim în punctul $x = 1$ și un maxim în punctul $x = 2$. Derivata $f'(x) = 2x$ nu se anulează în aceste puncte.

3) O funcție poate avea un extremum într-un punct x_0 fără a avea derivată în punctul x_0.

E x e m p l e

1) Funcția $f(x) = x^2 + |x|$ (v. fig. 69) are în punctul $x = 0$ un minim și nu are derivată în punctul $x = 0$.

2) Funcția $f(x) = |x|$ nu are derivată în punctul $x = 0$; funcția are în $x = 0$ un minim.

Reciproca teoremei lui Fermat nu este în general adevărată. O funcție derivabilă într-un punct x_0, care are derivata nulă în punctul x_0, nu are în punctul x_0 în mod necesar un extremum.

Exemplu

Funcția $f(x) = x^2 \sin x$, $x \in R$, derivabilă pe R cu $f'(x) = x(2 \sin x + x \cos x)$, are $f'(0) = 0$. În punctul $x = 0$, funcția $f(x)$ nu are un extremum, deoarece

$$f(x) - f(0) = x^2 \sin x > 0, \text{ dacă } 0 < x < \pi,$$

$$f(x) - f(0) = x^2 \sin x < 0, \text{ dacă } -\pi < x < 0,$$

deci condițiile de extremum nu sînt îndeplinite.

Probleme practice

1) Știind că o grindă de lățime b și înălțime h, supusă la încovoiere, are rezistența proporțională cu bh^2, se cere să se taie dintr-un buștean circular o grindă de rezistență maximă la încovoiere (fig. 84).

Dacă notăm cu σ rezistența la încovoiere,

$$\sigma = kbh^2, \; b^2 + h^2 = 4r^2, \text{ deci } \sigma(b) = kb(4r^2 - b^2),$$

$$\frac{d\sigma}{db} = k(4r^2 - b^2) - 2kb^2 = 0, \quad b_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} r.$$

Pentru $b_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} r$, $h_0 = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r$, σ este maxim, deoarece

$$\sigma(b_0 + \alpha) - \sigma(b_0) = k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} r + \alpha\right) 4r^2 - k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} r + \alpha\right)^3 - k\frac{16}{3\sqrt{3}} r^3,$$

$$\sigma(b_0 + \alpha) - \sigma(b_0) = -\frac{8}{3\sqrt{3}} r^3 - \frac{6}{\sqrt{3}} r\alpha^2 < 0,$$

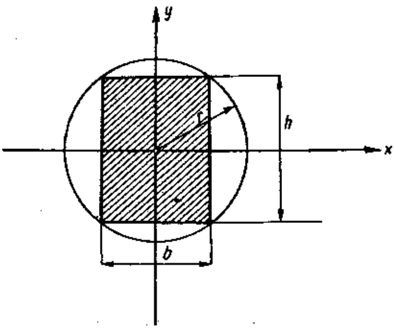


Fig. 84

pentru orice α pozitiv sau negativ.

2) Un element galvanic de forță electromotoare E și rezistență interioară r produce un curent I într-un circuit exterior de rezistență R. Intensitatea curentului este dată de

$$I = \frac{E}{r + R}.$$

Puterea efectivă a elementului galvanic este

$$L = RI^2 = \frac{RE^2}{(r + R)^2}.$$

Cît de mare trebuie să fie R pentru ca L să fie maxim?

Trebuie să găsim valorile lui R care anulează pe $\frac{dL}{dR}$:

$$\frac{dL}{dR} = E^2 \frac{r + R - 2R}{(r + R)^3},$$

deci $\frac{dL}{dR} = 0$, dacă $R = r$.

Pentru $R = r$, avem un maxim, deoarece

$$L(r + \alpha) - L(r) = E^2 \left(\frac{r + \alpha}{(2r + \alpha)^2} - \frac{1}{4r} \right) = - \frac{\alpha^2 E^2}{4r(2r + \alpha)^2} < 0$$

pentru α pozitiv sau negativ.

2. Funcţii monotone pe un interval

T e o r e m ă. Fie $f: I \to R$ o funcţie derivabilă pe I. *a)* Dacă f este crescătoare pe I, derivata sa f' este pozitivă pe I. *b)* Dacă f este descrescătoare pe I, derivata sa f' este negativă pe I.

Demonstraţie. *a)* Dacă x_0 este un punct oarecare al lui I, iar f este crescătoare pe I, avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \qquad \text{pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

şi la limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

b) Dacă f este descrescătoare pe I, avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

pentru orice $x \neq x_0$ din I şi la limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0.$$

E x e m p l e

1) Funcţia $f(x) = \sin x$ este crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; derivata sa $f'(x) = \cos x$ este pozitivă pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Funcţia $f(x) = \ln x$ este crescătoare pe $(0, +\infty)$; derivata sa $f'(x) = \frac{1}{x}$ este pozitivă pe $(0, +\infty)$.

Observație

Dacă funcția f este strict crescătoare pe I nu rezultă cu necesitate că derivata sa este strict pozitivă pe I.

Exemplu

Funcția $f(x) = x^5$ este strict crescătoare pe R; derivata sa $f'(x) = 5x^4$ se anulează în punctul $x = 0$.

Există funcții strict crescătoare pe un interval, derivabile, a căror derivată se anulează *în orice subinterval* al intervalului de definiție. Astfel de funcții se numesc *funcții Pompeiu*.

3. Teorema lui Rolle

Fie $f: I \to R$ și $a, b \in I$. Dacă f are următoarele proprietăți:

1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$,

2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b),

3) $f(a) = f(b)$.

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, $a < c < b$, în care derivata se anulează, $f'(c) = 0$.

Demonstrație. *a)* Dacă f este constantă pe I, $f(x) \equiv m$, $x \in I$, atunci $f'(x) \equiv 0$, $x \in I$ și teorema lui Rolle este demonstrată în acest caz.

b) Dacă funcția f nu este constantă, prin ipoteză este continuă pe intervalul *compact* $[a, b]$, deci există două puncte ξ_m și ξ_M în intervalul $[a, b]$ în care își atinge valorile extreme m, M, $m = f(\xi_m)$, $M = f(\xi_M)$, $m < M$, deci $f(\xi_m) < f(\xi_M)$ și

$$f(\xi_m) \leqslant f(x) \leqslant f(\xi_M), \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

Dacă ξ_m este punct interior al intervalului $[a, b]$, conform teoremei lui Fermat, $f'(\xi_m) = 0$ și teorema este demonstrată. Dacă $\xi_m = a$ sau $\xi_m = b$, atunci

$$f(a) = f(b) = f(\xi_m) < f(\xi_M).$$

Prin urmare, punctul ξ_M este interior intervalului $[a, b]$; luăm $c = \xi_M$. Teorema este complet demonstrată.

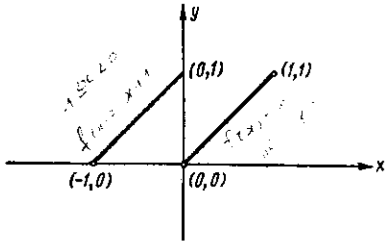
Observații

1) Dacă una din condițiile din enunț nu este îndeplinită, teorema în general nu este adevărată.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x+1, & \text{dacă } -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$

nu este continuă în punctul $x = 0$. Derivata nu se anulează în nici un punct din intervalul $[-1, +1]$ (fig. 85).



Fip. 85

2) Funcția $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

este continuă pe intervalul de definiție $[-1, +1]$, însă nu are derivata în punctul $x = 0$. Derivata nu se anulează în nici un punct din intervalul $[-1, +1]$ (fig. 86).

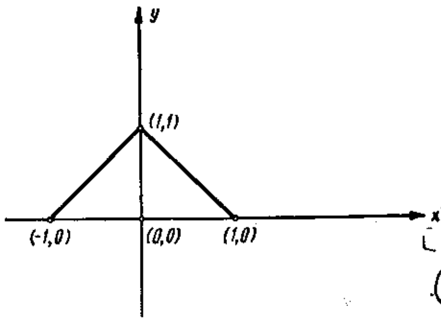


Fig. 86

3) Funcția

$f(x) = x^2, \ x \in [1, 2],$

este continuă și derivabilă pe intervalul de definiție, însă nu ia valori egale în punctele 1 și 2. Derivata nu se anulează în nici un punct din intervalul $[1, 2]$.

2) Teorema lui Rolle afirmă că dacă condițiile din teoremă sînt îndeplinite există cel puțin un punct în interiorul intervalului în care derivata se anulează. În general, numărul punctelor în care derivata se anulează este impar, adică există un număr impar de puncte c_k, $(k = 1, 3, 5, \ldots)$ în care tangenta la grafic este paralelă cu axa ox, (fig. 87).

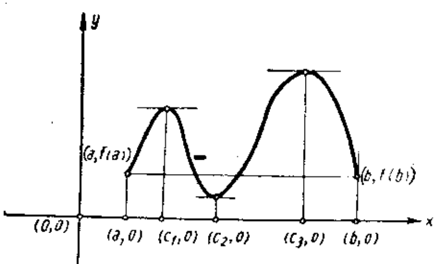


Fig. 87

3) Teorema lui Rolle rămîne adevărată dacă în puncte din intervalul deschis (a, b) derivata este infinită, deoarece s-a folosit în demonstrație teorema lui Fermat, care nu cere ca derivata să fie finită.

În punctul d derivata este infinită, iar în punctul c derivata este nulă (fig. 88).

Dacă $f(a) = f(b) = 0$, adică a și b sînt rădăcini ale ecuației $f(x) = 0$, atunci teorema lui Rolle are următorul enunț:

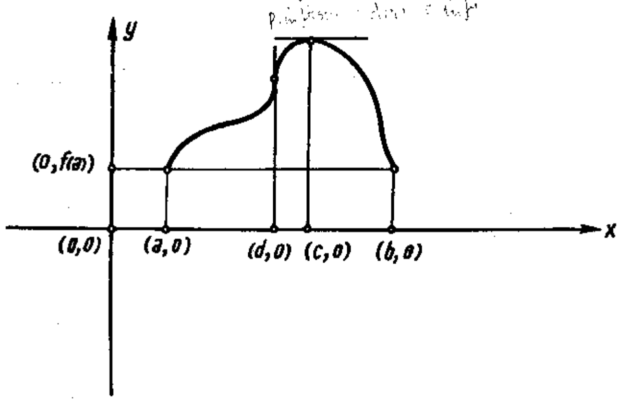


Fig. 88

Între două rădăcini reale consecutive ale funcției există cel puțin o rădăcină reală (un număr impar) a derivatei.

O deosebită importanță în aplicații are următoarea:

Consecință. Între două rădăcini reale consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină reală a funcției.

Demonstrație. Fie c_1 și c_2 două rădăcini reale consecutive ale derivatei. Să presupunem că între c_1 și c_2 există două rădăcini reale diferite α, β ale funcției

$$c_1 < \alpha < \beta < c_2$$

și

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0.$$

Conform teoremei lui Rolle, între α și β *trebuie* să existe o rădăcină a derivatei, ceea ce nu se poate, deoarece c_1 și c_2 sînt rădăcini consecutive ale derivatei. Prin urmare, între două rădăcini consecutive ale derivatei *există cel mult* o rădăcină a funcției, și anume atunci cînd f ia valori de semne contrare în punctele c_1 și c_2

$$f(c_1) \cdot f(c_2) < 0.$$

Această teoremă permite să separăm rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ dacă cunoaștem rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$. Fie

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_p$$

toate rădăcinile reale ale ecuației $f'(x) = 0$ așezate în ordine crescătoare.

Formăm șirul lui Rolle

$$f(-\infty),\ f(c_1),\ f(c_2),\ \ldots,\ f(c_p),\ f(+\infty).$$

Conform consecinței enunțate, în fiecare interval $(f(-\infty),\ f(c_1))$, $(f(c_i),\ f(c_{i+1}))$ sau $(f(c_p),\ f(+\infty))$ există cel mult o rădăcină reală a funcției; există o rădăcină numai dacă la capetele intervalului funcția ia valori de semne contrare; *prin urmare, ecuația $f(x) = 0$ are atîtea rădăcini reale cîte variații de semn prezintă șirul lui Rolle.*

Exemple

1) Să se separe rădăcinile reale ale ecuației

$$f(x) \equiv 9x^4 + 2x^3 - 33x^2 - 36x + 1 = 0.$$

Derivata $f'(x) \equiv 36x^3 + 6x^2 - 66x - 36$ are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{3}{2}$. Formăm șirul lui Rolle

$$f(-\infty),\ f(-1),\ f\left(-\frac{2}{3}\right),\ f\left(\frac{3}{2}\right),\ f(+\infty)$$

$$+,\ +11,\ +\frac{311}{27},\ -\frac{403}{2},\ +$$

Ecuația are două rădăcini reale, una în intervalul $\left(-\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)$ și a doua în intervalul $\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$, deoarece $f(3) > 0$.

2) Să se discute cu ajutorul teoremei lui Rolle ecuația

$$f(x) \equiv x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \lambda = 0.$$

Avem $f'(x) \equiv 4x^3 - 6x^2 - 4x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 2$.

Formăm șirul lui Rolle

λ	$f(-\infty)$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(+\infty)$	Natura rădăcinilor
	$+$	$\lambda - \frac{3}{16}$	λ	$\lambda - 8$	$+$	
$-\infty$						
	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	2 rădăcini reale
0	$+$	$-$	0	$-$	$+$	4 rădăcini reale, 1 dublă
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 rădăcini reale
$\frac{3}{16}$	$+$	0	$+$	$-$	$+$	4 rădăcini reale. 1 dublă
	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	2 rădăcini reale
8	$+$	$+$	$+$	0	$+$	2 rădăcini reale (dublă)
	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	nici o rădăcină reală
$+\infty$						

4. Teorema lui Cauchy

Fie f și g două funcții definite pe un interval I și $a < b$ două puncte din I. Dacă

1) f și g sînt continue pe intervalul închis $[a, b]$,
2) f și g sînt derivabile pe intervalul deschis (a, b),
3) $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$,

atunci există un punct $c \in (a,b)$, $a < c < b$, astfel încît să avem

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstrație. Funcția $F(x) = Af(x) + Bg(x) + C$, A, B, C constante, este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b). Să determinăm pe A, B, C astfel încît $F(a) = F(b) = 0$. Aceste condiții ne dau

$$Af(a) + Bg(a) + C = 0$$
$$Af(b) + Bg(b) + C = 0$$

sau, scăzîndu-le,

$$A(f(b) - f(a)) + B(g(b) - g(a)) = 0,$$

deci putem lua

$$A = g(b) - g(a); \quad B = f(a) - f(b).$$

Nu putem avea $g(b) = g(a)$, deoarece, conform teoremei lui Rolle, ar exista $\xi \in (a, b)$ astfel încît $g'(\xi) = 0$, ceea ce nu se poate, deoarece $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$. Cu A și B astfel determinați și $C = 0$, avem

$$F(x) = (f(a) - f(b))\, g(x) + (g(b) - g(a))\, f(x)$$

și funcția F îndeplinește toate condițiile teoremei lui Rolle, deci există un punct $c \in (a, b)$, $a < c < b$, în care derivata

$$F'(x) = (f(a) - f(b))\, g'(x) + (g(b) - g(a))\, f'(x)$$

se anulează

$$(f(a) - (f(b))\, g'(c) + (g(b) - g(a))\, f'(c) = 0$$

și, cum $g'(c) \neq 0$, $g(b) - g(a) \neq 0$, putem scrie

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b. \tag{1}$$

Formula obținută se numește „formula generală a mediei“ sau „a doua formulă a mediei“.

Observații

1) Teorema lui Cauchy rămîne adevărată dacă funcțiile f și g au derivata infinită în puncte din intervalul (a, b) și dacă în fiecare punct $x \in (a, b)$ cel puțin una din derivatele $f'(x)$, $g'(x)$ este finită. Ultima restricție se datorește faptului că $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|$ trebuie să nu fie nedeterminat. În ceea ce privește prima afirmație, ea rezultă din observația (3) de la teorema lui Rolle.

2) În aceleași condiții din enunțul teoremei lui Cauchy, dacă $f(a) = g(a) = 0$, pentru orice $x \in (a, b)$ există un punct ξ cuprins între a și x ($\xi \neq a$, $\xi \neq x$) astfel încît să avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

formulă ce se obține din (1) înlocuind pe $f(a)$ și $g(a)$ cu 0 și pe b cu x.

5. Formula creșterilor finite

Teorema lui Lagrange. Fie f o funcție definită pe un interval I și a, b două puncte din I. Dacă

1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$,

2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b),

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, $a < c < b$, astfel încît să avem

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Demonstrație. Teorema lui Lagrange este un caz particular al teoremei lui Cauchy și se obține din teorema lui Cauchy, luînd $g(x) \equiv x$. Funcția $g(x)$ îndeplinește condițiile teoremei lui Cauchy, deoarece $g'(x) \equiv 1$; cu $g(b) - g(a) = b - a$, avem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b. \tag{1}$$

Formula (1) se numește „formula creșterilor finite" sau „formula mediei".

Interpretarea geometrică a formulei creșterilor finite

Dacă considerăm graficul funcției $y = f(x)$, raportul

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

este coeficientul unghiular al coardei care unește punctele A, B de abscise a și b. Prin urmare, egalitatea $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ arată că există *cel puțin* un punct c cuprins între a și b astfel încît tangenta la grafic, în punctul $x = c$, este paralelă cu coarda AB (fig. 89).

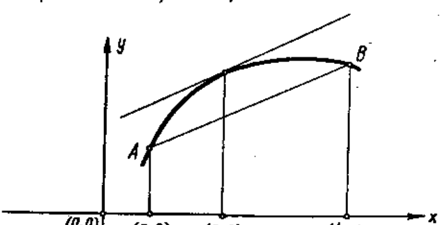


Fig. 89

Observații

1) Teorema lui Lagrange rămîne adevărată dacă $f(x)$ are derivata finită sau infinită în intervalul deschis (a, b).

2) În general există un număr impar de puncte $c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}$, în care $f'(c_k) = 0$.

Dacă sîntem în condițiile teoremei lui Lagrange și $x \in (a, b)$, avem următoarele formule *echivalente* cu formula creșterilor finite:

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi),\ a < \xi < x$$

sau

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1.$$

6. Consecințe ale formulei creșterilor finite

a) Știm că derivata unei funcții constante pe un interval I este nulă pentru orice $x \in I$. Reciproc

Teoremă. Dacă f are derivata nulă pe un interval I, atunci funcția f este constantă pe acest interval.

Demonstrație. Fie a un punct din I. Pentru orice $x \in I$, $x \neq a$ există un punct ξ cuprins între x și a astfel încît să avem

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi).$$

Însă $f'(x) = 0$, $x \in I$, deci $f'(\xi) = 0$ și, prin urmare, $f(x) - f(a) = 0$, de unde rezultă $f(x) = f(a)$ pentru orice $x \in I$, adică f este constantă pe I.

b) Fie două funcții f și g derivabile pe un interval I; dacă diferența este constantă pe I, atunci derivatele lor sînt egale, deoarece din $f(x) - g(x) = C$ avem, prin derivare, $f'(x) - g'(x) = 0$, adică $f'(x) = g'(x)$ pentru orice $x \in I$. Reciproc

Teoremă. Dacă f și g sînt două funcții derivabile pe un interval I și dacă $f'(x) = g'(x)$ pentru orice $x \in I$, atunci diferența lor $f(x) - g(x)$ este constantă pe I.

Demonstrație. Funcția $h(x) = f(x) - g(x)$ este derivabilă pe I și are derivata $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ nulă pe I,

$$f'(x) - g'(x) = 0$$

sau

$$f(x) - g(x) = C \text{ pentru orice } x \in I.$$

c) Am văzut la acest capitol, § 5, al. 2, că o funcție crescătoare pe un interval I, derivabilă pe I, are derivata pozitivă pe I și o funcție descrescătoare pe I, derivabilă pe I, are derivata negativă pe I; mai scurt, pentru o funcție monotonă pe un interval I, derivabilă pe interval, derivata păstrează un semn constant pe acel interval.

Reciproca acestui fapt este dată de următoarea

Teoremă. Fie $f: I \to R$, derivabilă pe I. Dacă f' este strict negativă pe I, atunci f este strict descrescătoare pe I. Dacă f' este strict pozitiv, atunci f este strict crescătoare pe I.

Demonstrație. Avem, conform formulei creșterilor finite,

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \ x_1 < \xi < x_2,$$

dacă $x_1 < x_2$ sînt două puncte oarecare din I. Deoarece $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, rezultă că $f'(\xi) < 0$, deci

$$f(x_2) < f(x_1), \ x_1 < x_2, \ x_1 \in I, \ x_2 \in I.$$

adică f este strict descrescătoare pe I.

Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, rezultă că $f'(\xi) > 0$ și, cum $x_2 > x_1$, urmează că

$$f(x_2) > f(x_1), \ x_1 < x_2, \ x_1 \in I, \ x_2 \in I,$$

deci f este strict crescătoare pe I.

Observații

1) Cele trei teoreme enunțate la acest aliniat nu sînt în general valabile pe o reuniune de intervale.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

are derivata nulă pe fiecare din intervalele de definiție, însă nu este constantă pe domeniul de definiție $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) Funcțiile $f(x) = x$, $x \in R - \{0\}$ și

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

au derivatele egale pe domeniul de definiție $R - \{0\}$, însă diferența lor nu este constantă pe $R - \{0\}$, deoarece

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ +1, & x < 0 \end{cases}$$

3) Funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ definită pe $(-\pi, \pi) - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ are derivata $\frac{1}{\cos^2 x}$, strict pozitivă pe domeniul de definiție, însă $f(x)$ nu este crescătoare pe domeniul de definiție, deoarece

$$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -1, \ f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \ f(0) = 0.$$

În ultima teoremă putem înlocui semnul $>$ cu $\geqslant$ și $<$ cu $\leqslant$, astfel încît avem următoarea

Teoremă. Fie $f: I \to R$ derivabila pe I. Dacă f' este pozitivă pe I, atunci f este crescătoare pe I; dacă f' este negativă pe I, f este descrescătoare pe I.

d) Pentru funcțiile cu derivata mărginită enunțăm următoarea

Teoremă. Fie $f: I \to R$, f derivabilă pe I; dacă f are derivata mărginită pe I, adică

$$|f'(x)| < M, M > 0, \text{ pentru orice } x \in I,$$

atunci f este lipschitziană pe I.

Demonstrație. Conform formulei creșterilor finite, avem

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi), \quad a < \xi < x,$$

deci

$$|f(x) - f(a)| < |x - a| \cdot M$$

pentru orice $x \in I$, adică f este lipschitziană pe I.

Consecințe

1) **O funcție $f: I \to R$, derivabilă pe I, cu derivata mărginită pe I, este uniform continuă pe I.**

Demonstrație. O funcție lipschitziană pe un interval este uniform continuă pe interval.

2) **O funcție $f: I \to R$, derivabilă pe intervalul mărginit I, cu derivata mărginită pe I, este mărginită.**

Demonstrație. Dacă l este lungimea intervalului I, atunci

$$|f(x) - f(a)| < l \cdot M \text{ pentru orice } x \in I,$$

deci $f(x)$ este mărginită pe I.

7. Evaluarea erorii din calculele numerice

O altă aplicație a formulei creșterilor finite o întîlnim la evaluarea erorii în calculele numerice.

Eroare absolută. Fie a un număr real care nu se transformă într-o fracție zecimală exactă. În calculele numerice ne mulțumim cu o valoare aproximativă a', prin lipsă sau exces. Diferența $a - a'$ poate fi pozitivă sau negativă, după cum a' aproximează pe a prin lipsă sau exces.

Valoarea absolută a acestei diferențe $|a - a'|$ se numește *eroare absolută.* În general, cunoașterea erorii absolute nu este posibilă și în practică ne mulțumim ca o majorantă a ei, adică un număr pozitiv ε, astfel încît

$$|a - a'| < \varepsilon.$$

Dacă a este un număr real și a' este numărul rațional care aproximează pe a cu n zecimale exacte, atunci $\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot 10^n}$.

Exemple

1) Dacă $a = \sqrt{2}$, $a' = 1{,}41$,

$$a - a' < \frac{1}{2 \cdot 10^2}.$$

2) Dacă $a = \pi$, $a' = 3{,}1459265$,

$$a - a' < \frac{1}{2 \cdot 10^7}.$$

Eroare relativă. Eroarea absolută nu ne dă nici o informație asupra gradului de precizie cu care s-a efectuat o măsurătoare. Pentru determinarea preciziei unei măsurători nu se consideră eroarea absolută, ci *eroarea relativă*, care este dată de raportul $\left|\frac{a - a'}{a}\right|$. De obicei, eroarea relativă este dată în procente

$$P = 100 \cdot \left|\frac{a - a'}{a}\right|.$$

Deoarece $a - a'$ și a nu sînt cunoscute în practică, se ia o majorantă P' a lui P, dată, în procente, de

$$P' = 100 \cdot \frac{\varepsilon}{|a' - \varepsilon|},$$

unde ε este o majorantă a erorii absolute.

Exemplu

La măsurarea unei distanțe de 30 km se face o eroare absolută de 6 m și la măsurarea unei stofe de 3 m se face o eroare absolută de 6 cm. Să se compare precizia celor două măsurători. Eroarea în procente la prima măsurătoare este

$$P_1 = 100 \cdot \frac{6}{30\,000} = 0{,}02\%,$$

iar la măsurătoarea stofei

$$P_2 = 100 \cdot \frac{6}{300} = 2\%,$$

deci prima măsurătoare este de 100 ori mai precisă decît a doua.

Expresia erorii în calculele cu aproximație. Fie $f(x)$ o funcție derivabilă pe un interval I și a un punct din interval. Ne propunem să găsim o majorantă a erorii absolute pe care o facem asupra lui $f(x)$ dacă înlocuim pe a cu valoarea sa aproximativă a', astfel încît $|a - a'| < \varepsilon$.

Aplicînd formula creșterilor finite, avem

$$f(a) - f(a') = (a - a')\, f'(\xi), \quad a' < \xi < a,$$

deci

$$|f(a) - f(a')| = |a - a'| \cdot |f'(\xi)|,$$

în care, dacă înlocuim pe $|a - a'|$ cu ε și pe $|f'(\xi)|$ cu valoarea maximă a funcției $|f'(x)|$ în intervalul (a', a), avem

$$|f(a) - f(a')| < \varepsilon \max |f'(x)|, \quad x \in (a, a')$$

și determinarea erorii absolute $|f(a) - f(a')|$ s-a redus la determinarea valorii maxime a modulului derivatei lui f în intervalul (a', a).

Exemplu

Care este eroarea pe care o facem asupra lui $\sqrt{\pi}$ dacă luăm pentru π valoarea aproximativă 3,14.

În acest caz, $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3{,}1416\ldots$, $a' = 3{,}14$, deci

$$\sqrt{\pi} - \sqrt{3{,}14} = (\pi - 3{,}14)\,\frac{1}{2\sqrt{\xi}} < \frac{0{,}0016}{2\sqrt{3{,}14}} \simeq 0{,}004,$$

deci eroarea este mai mică decît $\dfrac{4}{1\,000}$.

§ 6. REGULA LUI L'HOSPITAL

În operații cu limite de funcții ajungeam uneori la rezultate de forma

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty - \infty,\ \infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty,$$

care nu au sens. Ele se numesc forme nedeterminate și în cazul lor trebuie făcut un studiu direct pentru a vedea dacă există limita.

1. Regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$

Teorema 1. Fie f și g două funcții definite pe I și x_0 un punct de acumulare, finit sau infinit, al lui I, în care funcțiile f și g pot să nu fie definite. Dacă

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

2) **f și g sînt derivabile pe I sau pe $I - \{x_0\}$,**

3) **$g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I,**

4) **există**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \ \text{(finită sau infinită)},$$

atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în punctul x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstrație. *a)* Presupunem mai întîi că *numărul x_0 este finit.* Dacă f și g nu sînt continue în punctul x_0, să le *prelungim prin continuitate* pe $I \cup \{x_0\}$, astfel:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \bar{g}(x), & \text{dacă } x = x_0 \\ 0, & \text{dacă } x \neq x_0 \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\lim_{x\to x_0} \bar{f}(x) = \bar{f}(x_0) = 0, \ \lim_{x\to x_0} \bar{g}(x) = \bar{g}(x_0) = 0.$$

Funcțiile $\bar{f}(x)$ și $\bar{g}(x)$ sînt derivabile pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$, și anume

$$\bar{f}'(x) = f'(x), \ \bar{g}'(x) = g'(x), \ x \in I, \ x \neq x_0.$$

Funcția $g(x)$, deci și $\bar{g}(x)$, nu se anulează pentru $x \neq x_0$, $x \in I$. Într-adevăr $g'(x)$ nu se anulează nici la stînga lui x_0, nici la dreapta lui x_0, deci $\bar{g}(x)$ este strict monotonă atît la stînga lui x_0 cît și la dreapta lui x_0, deci $\bar{g}(x) \neq \bar{g}(x_0)$ pentru orice $x \neq x_0$, $x \in I$.

Fie acum un șir arbitrar $x_n \in I$ convergent către x_0.

Funcțiile $\bar{f}(x)$, $\bar{g}(x)$, $x \in I \cup \{x_0\}$ îndeplinesc condițiile teoremei lui Cauchy; pentru intervalul (x_n, x_0) avem

$$\frac{\bar{f}(x_n) - \bar{f}(x_0)}{\bar{g}(x_n) - \bar{g}(x_0)} = \frac{\bar{f}'(\xi_n)}{\bar{g}'(\xi_n)},$$

însă $\bar{f}(x_0) = 0$, $\bar{g}(x_0) = 0$, $\bar{f}(x_n) = f(x_n)$, $\bar{g}(x_n) = g(x_n)$, $\bar{f}'(\xi_n) = f'(\xi_n)$, $\bar{g}'(\xi_n) = g'(\xi_n)$, deci

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Deoarece $x_n < \xi_n < x_0$, urmează $|\xi_n - x_0| < |x_n - x_0|$ și cînd $x_n \to x_0$ și $\xi_n \to x_0$, însă

$$\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to A \text{ (finit sau infinit)},$$

dacă $\xi_n \to x_0$, $\xi_n \neq x_0$, deci și

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A, \text{ dacă } x_n \to x_0,$$

adică

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

dacă ultima limită există (finită sau infinită). Demonstrația pentru x_0 finit s-a terminat.

b) Numărul x_0 este infinit. Vom presupune $x_0 = +\infty$ şi luăm pentru I intervalul $(a, +\infty)$, $a > 0$.

Funcţiile

$$F(y) = f\left(\frac{1}{y}\right),\ G(y) = g\left(\frac{1}{y}\right),\ 0 < y < \frac{1}{a}$$

verifică toate condiţiile teoremei pentru $y_0 = 0$.

1) $\lim\limits_{y\to 0} F(y) = 0$; $\lim\limits_{y\to 0} G(y) = 0$.

Într-adevăr, pentru $x_n \to +\infty$ şirul $\frac{1}{x_n} = y_n \to 0$, $0 < y_n < \frac{1}{a}$, deci

$$\lim_{y_n\to 0} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{x_n\to\infty} f(x_n) = 0,\ \lim_{y_n\to 0} g\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{y_n\to+\infty} g(x_n) = 0.$$

Şirul $y_n \to 0$, $y_n > 0$, a fost arbitrar, deci

$$\lim_{y\to 0} F(y) = 0,\quad \lim_{y\to 0} G(y) = 0.$$

2) Funcţiile $F(y)$ şi $G(y)$ sînt derivabile pe $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, deoarece rezultă din compunerea funcţiilor f şi g cu funcţia $u(y) = \frac{1}{y}$; $u(y)$ este derivabila pe $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ şi f şi g sînt derivabile pe $(a, +\infty)$. Avem

$$F'(y) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right),\ G'(y) = -\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right),$$

după regula de derivare a funcţiilor compuse.

3) $G'(y) \neq 0$, $0 < y < \frac{1}{a}$, deoarece $\frac{1}{y^2} \neq 0$ şi $g'\left(\frac{1}{y}\right) \neq 0$, întrucît $g'(x) \neq 0$.

4) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Într-adevăr

$$\lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Însă pentru $x_n \to +\infty$, $\frac{1}{y_n} \to 0$, deci

$$\frac{f'\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g'\left(\frac{1}{y_n}\right)} = \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} \to A.$$

Prin urmare,

$$\lim_{y\to 0}\frac{F'(y)}{G'(y)}=A,$$

şirul y_n fiind arbitrar, deoarece şirul x_n este arbitrar.

Putem deci aplica funcţiilor $F(y)$ şi $G(y)$ teorema demonstrată în punctul $y=0$ (finit).

Deoarece $G(y)$ îndeplineşte toate condiţiile teoremei, rezultă $G(y)\neq 0$, $y\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$, deci $g(x)\neq 0$ pentru orice $x\in(a,+\infty)$.

Pentru un şir oarecare $x_n\to+\infty$, şirul corespunzător $y_n\to 0\left(y_n=\frac{1}{x_n}\right)$ cu $y_n>0$; prin urmare,

$$\frac{F(y_n)}{G(y_n)}\to A,$$

însă

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g\left(\frac{1}{y_n}\right)}=\frac{F(y_n)}{G(y_n)},$$

de unde rezultă că $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to A$; deoarece şirul $x_n\to+\infty$ este arbitrar, urmează că

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

dacă limita din partea a doua există (finită sau infinită).

Demonstraţia teoremei s-a terminat.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+\cos x}{\frac{1}{1+x}}=1+\ln a.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-c^x-d^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b-c^x\ln c-d^x\ln d}{1}=\ln\frac{ab}{cd}.$

Observaţii

1) Reciproca regulii lui l'Hospital nu este în general adevărată. Se poate ca $\frac{f(x)}{g(x)}$ să aibă limită în punctul x_0 şi $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ să nu aibă limită în punctul x_0.

Exemplu

Fie funcțiile $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ și $g(x) = \ln(1+x)$ definite pe $(-1\ \ +1) - \{0\}$; avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$

Funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ sînt derivabile pe intervalul de definiție și derivata $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ nu se anulează pe $(-1, +1) - \{0\}$, totuși funcția $\frac{f'}{g'}$ nu are limită în punctul 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} - \lim_{x\to 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}$$

și ultima limită nu există pentru că funcția $\cos \frac{1}{x}$ nu are limită cînd $x \to 0$.

2) Dacă derivatele f' și g' au limita 0 în punctul x_0 și dacă funcțiile f' și g' îndeplinesc condițiile din teoremă, atunci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se poate calcula aplicînd încă o dată regula lui l'Hospital. În general, dacă:

1° funcțiile f și g sînt derivabile de n ori pe I sau pe $I - \{x_0\}$, unde x_0 este un punct de acumulare finit sau infinit al lui I,

2° $g^{(n)}(x) \neq 0$, pentru orice $x \neq x_0$ din I,

3° $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

4° există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A$ (finită sau infinită), atunci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A$$

și se demonstrează prin recurență.

Exemplu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x - \cos x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x + \sin x}{6} = \frac{1}{3}.$$

2. Regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 2. **Fie f și g două funcții definite pe un interval I sau $I - \{x_0\}$, unde x_0 este un punct de acumulare al lui I. Dacă**

1) funcția $g(x)$ este strict monotonă atît la dreapta cît și la stînga lui x_0 și $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$,

2) funcțiile f și g sînt derivabile pe I sau $I - \{x_0\}$,

3) $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I,

4) există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ (finită sau infinită)},$$

atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Demonstrație. Să presupunem că $g(x)$ este strict crescătoare la stînga lui x_0. Dacă x_n este un șir strict crescător convergent către x_0, șirul $g(x_n)$ este de asemenea strict crescător și are limita $+\infty$. Dacă aplicăm funcțiilor f și g formula generală a mediei pe intervalul (x_n, x_{n+1}), avem

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad x_n < \xi_n < x_{n+1},$$

și pentru că $x_n \to x_0$, deoarece $|\xi_n - x_0| < |x_n - x_0| \to 0$, urmează că $\xi_n \to x_0$, $\xi_n < x_0$, deci

$$\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to A,$$

deoarece

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Șirul $g(x_n)$ fiind monoton crescător, nemărginit, putem aplica lema lui O. Stolz [B. cap. I, § 6, al. 4] șirurilor $f(x_n)$ și $g(x_n)$, de unde deducem că dacă $x_n \to x_0$ rezultă că $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A$; prin urmare,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

deoarece șirul x_n este arbitrar.

Același rezultat se obține dacă considerăm pe $g(x)$ strict monoton la dreapta lui x_0. Cele două limite fiind egale, rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

dacă limita a doua există. Dacă x_0 este o extremitate a intervalului I, de exemplu extremitatea stîngă, atunci se consideră numai șiruri x_n, strict descrescătoare către x_0.

Observații

1) Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (sau $-\infty$), obținem regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$.

2) Observațiile făcute pentru cazul $\frac{0}{0}$ sînt valabile și pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{n\, x^{n-1}} = \ldots = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x \ln^n a}{n!} = +\infty$ dacă $a > 1$.

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg} x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{1} = -1.$

3) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha\, x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\alpha\, x^\alpha} = +\infty$, dacă $\alpha > 0$.

3. Cazul $0\cdot\infty$

Fie f și g două funcții definite și derivabile pe I sau $I - \{x_0\}$, x_0 un punct de acumulare al lui I. Dacă

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty,$$

pentru funcția $f(x)\cdot g(x)$ cînd $x\to x_0$ sîntem în cazul nedeterminării $0.\infty$. Funcția $g_1(x) = \frac{1}{g(x)} \to 0$ cînd $x \to x_0$.

Dacă scriem $f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{g_1(x)}$, nedeterminarea este de forma $\frac{0}{0}$ și am ajuns astfel la un caz cunoscut. Se cere ca $g_1'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \neq 0$, deci trebuie să avem $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in I - \{x_0\}$, pentru ca să fim în condițiile teoremei 1 (B. cap. IV, § 6, al. 1).

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\alpha x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}}} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{\alpha} x^\alpha\right) = 0$ dacă $\alpha > 0$.

4. Cazul $\infty - \infty$

Fie f şi g două funcţii definite şi derivabile pe I sau $I - \{x_0\}$, x_0 fiind un punct de acumulare al lui I. Dacă

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty.$$

pentru funcţia $f(x) + g(x)$ cînd $x \to x_0$ sîntem în cazul nedeterminării $\infty - \infty$. Funcţiile

$$f_1(x) = \frac{1}{f(x)} \to 0 \text{ şi } g_1(x) = \frac{1}{g(x)} \to 0 \text{ cînd } \ \to x_0.$$

Dacă scriem

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{g_1(x)} = \frac{f_1(x) + g_1(x)}{g_1(x) f_1(x)},$$

nedeterminarea este de forma $\frac{0}{0}$ şi am redus-o astfel la cazul întîi. Trebuie să avem însă

$$[g_1(x) \ f_1(x)]' = -\frac{f'(x) g(x) + g'(x) f(x)}{f^2(x) g^2(x)} \neq 0$$

pentru $x \in I - \{x_0\}$, pentru a fi în condiţiile teoremei 1.

Exemple

$$1) \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \text{ctg } x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$2) \lim_{x\to\infty} (x - e^x) = \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{1}{e^{-x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x e^{-x} - 1}{e^{-x}} = -\infty,$$

deoarece $\lim_{x\to\infty} x e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

5. Cazul 0^0

Fie f şi g două funcţii definite şi derivabile pe I sau $I - \{x_0\}$, x_0 fiind un punct de acumulare al lui I. Dacă

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \ f(x) > 0, \ x \in I - \{x_0\},$$

pentru funcţia $f(x)^{g(x)}$ cînd $x \to x_0$ sîntem în cazul nedeterminării 0^0. Să scriem

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Observăm că funcția $g(x)$ ln $f(x)$ pentru $x \to x_0$ este de forma $0.\infty$, nedeterminare pe care o tratăm ca la punctul 3. Dacă

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \ln f(x) = a, \text{ atunci } \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^a.$$

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$ are sens pentru $x > 0$. Punem

$$y = (\sin x)^x, \ \ln y = x \ln \sin x,$$

$$\lim_{x\to 0} x \ln \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{x^2 \cos x}{\sin x}\right] = 0,$$

deci

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)^x = e^0 = 1.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} (a^x - 1)^x, \quad a > 1.$

Punem $y = (a^x - 1)^x$, $\ln y = x \ln (a^x - 1)$, deci

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (a^x - 1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^x \ln a}{a^x - 1}}{-\frac{1}{x^2}} = -\ln a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{a^x - 1},$$

însă

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{a^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{a^x \ln a} = 0; \text{ prin urmare } \lim_{x\to 0} \ln y = 0$$

și

$$\lim_{x\to 0} (a^x - 1)^x = e^0 = 1.$$

6. Cazul 1^∞

Fie f și g două funcții definite și derivabile pe I sau $I - \{x_0\}$, x_0 fiind un punct de acumulare al lui I. Dacă

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1, \ \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty,$$

pentru funcția $f(x)^{g(x)}$ cînd $x \to x_0$ sîntem în cazul nedeterminării 1^∞. Să scriem

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Observăm că funcția $g(x)$ ln $f(x)$ pentru $x \to x_0$ este de forma $0.\infty$, nedeterminare pe care o tratăm ca la punctul 3. Dacă

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \ln f(x) = a,$$

atunci

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^a.$$

Exemple

1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{ctg} x}$. Punem $y=(1+x)^{\operatorname{ctg} x}$,

$$\ln y=\operatorname{ctg} x \ln(1+x);\quad \lim_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=1,\ \text{deci}\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{ctg} x}=e.$$

2) $\lim_{x\to 0}(1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx))^{\frac{1}{x}}$.

Punem

$$y=(1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx))^{\frac{1}{x}},$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+\ln(1+x)+\ldots+\ln(1+nx)]}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+2x}+\ldots+\dfrac{n}{1+nx}}{1+\ln(1+x)+\ldots+\ln(1+nx)}=\frac{n(n+1)}{2},$$

deci

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)+\ldots+\ln(1+nx)]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

7. Cazul ∞^0

Fie f şi g două funcţii definite şi derivabile pe I sau $I-\{x_0\}$, x_0 fiind un punct de acumulare al lui I.

Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, pentru funcţia $f(x)^{g(x)}$ cînd $x\to x_0$ sîntem în cazul nedeterminării ∞^0. Să scriem

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Observăm că funcţia $g(x)\ln f(x)$ pentru $x\to x_0$ este de forma $0.\infty$, nedeterminare pe care o tratăm ca la punctul 3. Dacă

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)=a,$$

atunci

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^a.$$

Exemplu

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^x \text{ pentru } x > 0 \text{ are sens.}$$

Punem $y = (\operatorname{ctg} x)^x$, $\ln y = x \ln \operatorname{ctg} x$, deci

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg} x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x \cos x} = 0,$$

deci $\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^x = 1.$

§ 7. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

Fiind dată o funcție $y = f(x)$, $x \in I$, unde I este un interval sau o reuniune finită sau infinită de intervale, se poate cere să studiem funcția f într-un interval $(a, b) \subset I$ sau pe tot domeniul de definiție I.

Dacă intervalul (a, b) este relativ mic, putem să tabulăm funcția, adică să trecem pe două coloane, respectiv, valorile variabilei independente și valorile funcției. Astfel de tabele s-au făcut pentru funcții de utilizare curentă, ca : x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, pentru valori întregi ale lui x. Pentru funcțiile $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ sau $\lg \sin x$, $\lg \cos x$, $\lg \operatorname{tg} x$, $\lg \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, s-au întocmit tabele cu cinci sau șapte zecimale.

Pe măsură ce alte funcții și-au impus necesitatea în probleme curente puse de tehnică, fizică etc., s-au făcut noi tabele. Funcțiile eliptice, funcțiile Bessel au fost de asemenea tabulate.

Însă o problemă nouă conduce de obicei la relații noi, deci la funcții noi, și cunoașterea comportării unei funcții pe domeniul de definiție este o necesitate ce se impune imediat. *Reprezentarea grafică* a funcției pe întreg domeniul de definiție este mijlocul practic cel mai potrivit pentru a cunoaște această comportare.

Trasarea graficului unei funcții $y = f(x)$ necesită parcurgerea mai multor etape, pe care le enumerăm mai jos:

1) stabilirea domeniului de definiție; intersecția cu axele de coordonate;

2) calculul derivatei întîi; intervalele de monotonie; puncte de extremum relativ;

3) asimptotele;

4) tabelul valorilor stabilite mai sus;

5) graficul.

1. Domeniul de definiţie

În general ni se cere să trasăm graficul unei funcţii elementare $y = f(x)$. Domeniul de definiţie, dacă nu este specificat, va fi format din mulţimea punctelor pentru care operaţiile cerute de f au sens. Dacă domeniul de definiţie este format dintr-un interval sau reuniune de intervale, se va cerceta comportarea funcţiei la capetele intervalelor. Dacă domeniul de definiţie este R, se va calcula $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ şi $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Exemple

1) Domeniul de definiţie al funcţiei $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ este $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

2) Domeniul de definiţie al funcţiei $\frac{\sqrt{x^4 - 10x^2 + 9}}{x}$ este $(-\infty, -3] \cup [-1, +1] \cup [3, +\infty) - \{0\}$.

3) Domeniul de definiţie al funcţiei $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ este mulţimea $(-\infty, +\infty) - \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$, k întreg oarecare.

Intersecţiile cu axa Ox se obţin rezolvînd ecuaţia $f(x) = 0$; punctul $(0, f(0))$ dacă aparţine domeniului de definiţie reprezintă intersecţia cu axa Oy.

2. Derivata întîi. Intervale de monotonie. Puncte de extremum

Reamintim rezultatele obţinute:

1) Dacă pe un interval (a, b) derivata $f'(x)$ este strict pozitivă, funcţia $f(x)$ este strict crescătoare pe (a, b).

2) Dacă pe un interval (a, b) derivata $f'(x)$ este strict negativă, funcţia $f(x)$ este strict descrescătoare pe (a, b).

Deci pentru a se stabili intervalele de monotonie ale funcţiei $f(x)$ se găseşte domeniul în care funcţia $f(x)$ este derivabilă, se calculează derivata $f'(x)$, se găsesc rădăcinile derivatei, adică ale ecuaţiei $f'(x) = 0$, se determină intervalele pe care derivata $f'(x)$ păstrează un semn constant.

Pe un interval în care $f'(x) > 0$, funcţia este strict crescătoare, iar pe un interval în care $f'(x) < 0$, funcţia este strict descrescătoare.

Punctele de extremum dintr-un interval în care f este derivabilă se găsesc printre punctele în care se anulează derivata întîi. Dacă într-un astfel de punct x_0, în care funcţia este continuă, avem

$$f(x) - f(x_0) < 0, \qquad x < x_0,\ x \in I,$$

$$f(x) - f(x_0) < 0, \qquad x > x_0,\ x \in I,$$

adică la stînga lui x_0 funcția $f(x)$ este strict crescătoare, prin urmare derivata este pozitivă, iar la dreapta lui x_0 funcția $f(x)$ este strict descrescătoare, deci derivata este negativă, punctul x_0 este un punct de maxim.

În mod asemănător punctul x_0 în care funcția este continuă este un **punct de minim** dacă

$$f(x)-f(x_0)>0, \qquad x<x_0,\ x\in I,$$
$$f(x)-f(x_0)>0, \qquad x>x_0,\ x\in I,$$

adică la stînga lui x_0 funcția $f(x)$ este strict descrescătoare, prin urmare derivata este negativă, iar la dreapta lui x_0 funcția este strict crescătoare, deci derivata este pozitivă.

Dacă derivata are același semn de o parte și de alta a punctului x_0, în punctul x_0 nu avem extremum. Tangenta în punctul x_0 la grafic este paralelă cu axa Ox, însă curba traversează tangenta; avem un *punct de inflexiune*.

Dacă derivata există pe o reuniune de intervale, se va cerceta comportarea derivatei la capetele intervalelor pentru a se găsi semitangentele la grafic în punctele respective.

3. Asimptotele

a) Asimptote verticale. Dreapta $x=x_0$ este asimptotă verticală a graficului funcției $f(x)$ dacă cel puțin una din limitele laterale ale funcției $f(x)$ în punctul x_0 există și este infinită.

Observații

1) Din definiție rezultă că punctul x_0 trebuie să fie *punct de acumulare* al mulțimii de definiție X.

2) Pentru ca dreapta $x=x_0$ să fie asimptotă verticală trebuie ca x_0 să fie punct de discontinuitate al funcției $f(x)$ sau funcția să nu fie definită în punctul x_0.

Exemple

1) O fracție rațională are dreptele $x=x_k$, unde x_k sint rădăcinile reale ale numitorului, asimptote verticale.

2) Funcția $\ln(1+\sin x)$, $x\in R-\left\{2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right\}$, are dreptele $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ asimptote verticale.

3) Funcția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x\in R-\{(2k+1)\pi\}$, are dreptele $x=(2k+1)\pi$ asimptote verticale.

b) Asimptote orizontale. Dreapta $y=y_0$ este asimptotă orizontală a graficului funcției $f(x)$ dacă

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \text{ sau } \lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0.$$

Observaţie

Pentru ca graficul funcţiei $f(x)$ să aibă asimptote verticale trebuie ca mulţimea de definiţie X să nu fie mărginită sau să nu fie mărginită superior sau inferior.

Exemple

1) Funcţia $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \in R - \{-1\}$, are $y = 1$ asimptotă orizontală şi $x = -1$ asimptotă verticală.

2) Funcţia $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$, $x \in R - \{+1\}$, are dreapta $x = 1$ asimptotă verticală şi dreptele $y = +1$, $y = -1$ asimptote orizontale, deoarece

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.$$

c) Asimptote oblice. Fie $f(x)$ o funcţie pentru care mulţimea de definiţie X este nemărginită sau numai nemărginită inferior sau superior. În această situaţie,

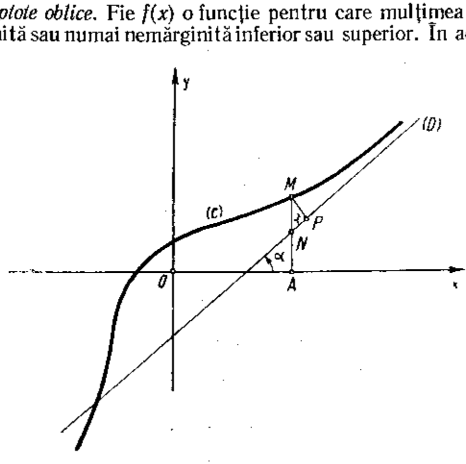


Fig. 90

punctele $+\infty$ şi $-\infty$ sau numai $+\infty$ ori $-\infty$ sînt puncte de acumulare ale mulţimii X.

Definiţie. Se spune că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la ramura $+\infty$ a graficului $y = f(x)$ dacă

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Conform figurii 90, avem $MN = f(x) - mx - n$, $MP = MN \cdot \sin \alpha$, deci cînd $x \to +\infty$, $MP \to 0$, deoarece $MN \to 0$; prin urmare, dreapta D

este asimptotă oblică la ramura $+\infty$ a graficului (C) dacă distanța unui punct M de pe curba C, la dreapta D, tinde către zero cînd punctul $M \to \infty$ pe ramura $+\infty$ a graficului.

Definiție. Se spune că dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă oblică la ramura $-\infty$ a graficului $y = f(x)$ dacă

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0.$$

Ne vom ocupa doar de asimptota oblică la ramura $+\infty$ a graficului curbei $y = f(x)$, deoarece pentru cealaltă se procedează în mod asemănător.

Din (1) rezultă imediat

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = n$$

sau

$$\lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = n.$$

Pentru ca n să fie finit este necesar ca

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = 0,$$

prin urmare m, dacă există, este dat de

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{2}$$

Ordonată la origine se obține din (1)

$$n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx],$$

unde m este numărul dat de (2).

Reciproc, dacă

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$, există și este finită,

2) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = n$, există și este finită, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la ramura $+\infty$ a graficului $y = f(x)$.

Într-adevăr,

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] - n = 0.$$

Exemplu. Funcția $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ are dreapta $y = x + 1$ asimptotă oblică

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

deci $m = 1$, $m' = 1$;

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 + x + 1}{x} - x\right] = 1; \qquad n' = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^2 + x + 1}{x} - x\right] = +1.$$

Cele două ramuri la infinit ale curbei au aceeași asimptotă oblică. Curba are și asimptota verticală $x = 0$.

4. Tabelul valorilor

Tabelul valorilor conține pe trei linii: linia valorilor variabilei, linia valorilor derivatei, linia valorilor funcției, toate datele obținute mai sus.

Exemple

1) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic pe tot domeniul de definiție funcția

$$y = \ln (1 + \cos x).$$

a) Domeniul de definiție este: $R - \{(2k + 1)\pi\}$, $k =$ întreg. Pentru $x = 2k\pi$, $y = \ln 2$; $y = 0$ pentru $\cos x = 0$, adică $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$. Funcția $\ln (1 + \cos x)$ este periodică, avînd perioada 2π. O putem studia în intervalul $[0, 2\pi]$ și pe urmă o prelungim pe toată axa.

b) Derivata $y' = \dfrac{-\sin x}{1 + \cos x}$ se anulează în punctele $x = k\pi$.

La stînga punctului $x = 0$ (sau $2k\pi$), derivata este pozitivă, și la dreapta negativă, deci în punctul $x = 0$ (și $2\pi k$) graficul are un maxim Intervalele $(k\pi, (k + 1)\pi)$ sînt intervale de monotonie. Toate punctele $x_k = 2k\pi$ sînt puncte de maxim.

c) Dreptele $x = (2k + 1)\pi$ sînt asimptote verticale, deoarece

$$\lim_{x \to (2k+1)\pi} \ln (1 + \cos x) = -\infty.$$

d) Tabelul de variație pentru $[0, 2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π			$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'	0	— —	— —	— —	—	+	+ +	+ +	+ +	+
y	ln 2	↘	0	↘	$-\infty$	$-\infty$	↗	0	↗	ln 2

e) Graficul este dat în figura 91.

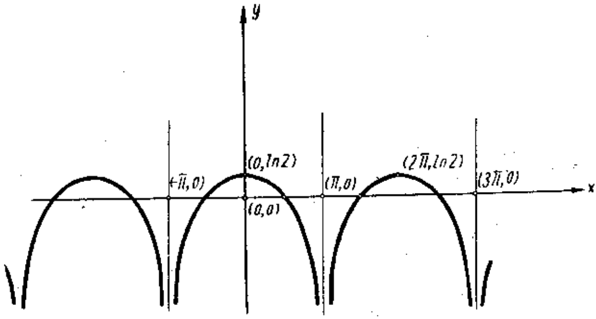


Fig. 91

O funcție $f(x)$ definită pe R se numește funcție periodică cu perioada ω dacă $f(x) = f(x+\omega)$ pentru orice $x \in R$. Din definiție rezultă că avem și $f(x) = f(x+n\omega)$, pentru orice $x \in R$ și n întreg.

Funcțiile periodice se studiază numai în intervalul format de o perioadă $[0, \omega]$ și se prelungesc apoi pe toată axa.

2) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția $y = \dfrac{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}}{x}$.

a) Domeniul de definiție este $(-\infty, -2] \cup [-1, +1] \cup [2, +\infty) - \{0\}$ și se obține punînd condiția $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant 0$, $y = 0$ pentru $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = +1$, $x_4 = +2$; punctul $x = 0$ nu aparține domeniului de definiție, deci curba nu taie axa Oy.

b) Derivata $y' = \dfrac{x^4 - 4}{x^2\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}}$, $y' = 0$ pentru $x_1' = -\sqrt{2}$, $x_2' = \sqrt{2}$, care nu aparțin domeniului de definiție.

c) Funcția are asimptota verticală $x = 0$ și asimptota oblică $y = x$, atît la ramura $+\infty$ cît și la ramura $-\infty$ a curbei.

d) Tabelul de variație este

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'	+ + +	+ + +	| ////////	////////	| – – –	– – –	| – – –	– – –	| ////////	////////	| + + +	+ + +	+
y	$-\infty$	↗	0		0	↘ $-\infty$	| $+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

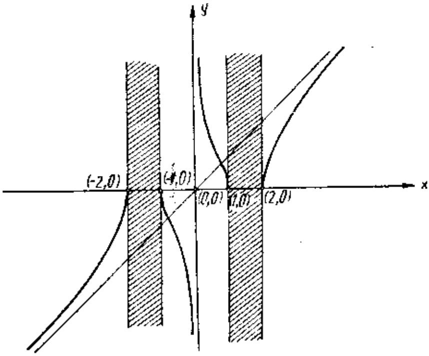


Fig. 92

Avem $y'(-2-0) = +\infty$, $y'(-1+0) = -\infty$, $y'(1-0) = -\infty$, $y'(2+0) = +\infty$.

e) Graficul nu are maxime sau minime (fig. 92).

5. Rezolvarea grafică a ecuațiilor

Ecuația $f(x) = 0$ se poate scrie într-o infinitate de moduri sub forma $f_1(x) - f_2(x) = 0$. Dacă alegem una din forme și reprezentăm grafic curbele $y = f_1(x)$ și $y = f_2(x)$ pe un același sistem de referință, punctele de intersecție

ale graficelor celor două curbe sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$. Într-adevăr, în acele puncte avem $f_1(x) = f_2(x)$, deci $f_1(x) - f_2(x) = 0$. Cu această metodă se obține ușor atît numărul de rădăcini reale ale unei ecuații cît și intervalele în care se găsesc.

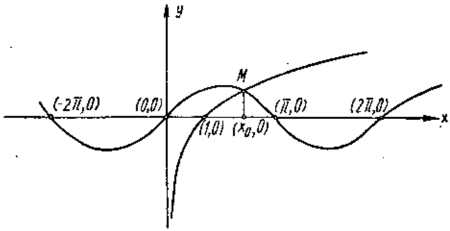


Fig. 93

Exemplu

Ecuația $\sin x = \ln x$ are o singură rădăcină x_0 reală. Conform figurii 93, rădăcina x_0 este pozitivă și se află în intervalul $(2, e)$.

§ 8. FORMULA LUI TAYLOR

1. Formula lui Taylor. Formula lui Mac-Laurin

Fie funcția $f(x)$, definită pe intervalul închis $[a, b]$, care îndeplinește următoarele condiții:

1) funcția $f(x)$ și toate derivatele ei pînă la ordinul n sînt continue pe $[a, b]$;

2) derivata de ordinul $n+1$ există în fiecare punct al intervalului deschis (a, b).

Să considerăm numărul A definit de egalitatea

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots +$$

$$+ \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (b-a)^p \cdot A, \tag{1}$$

unde p este un întreg pozitiv $\leqslant n+1$, precum și funcția F dată de

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \ldots +$$

$$+ \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + (b-x)^p \cdot A.$$

Funcția F are următoarele proprietăți:

1) $F(x)$ este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;

2) $F(x)$ este derivabilă pe intervalul deschis (a, b);

3) $F(b) = F(a)$.

Deoarece $f(x)$ împreună cu derivatele sale pînă la ordinul n sînt continue pe intervalul închis $[a, b]$, funcția $F(x)$ este derivabilă în intervalul (a, b), întrucît toate funcțiile care o compun sînt derivabile în (a, b).

Avem $F(b) = F(a) = f(b)$ dacă ținem seama de relația (1), care definește numărul A.

Funcția $F(x)$ îndeplinește în intervalul închis $[a, b]$ toate condițiile teoremei lui Rolle. Prin urmare, există un punct $\xi \in (a, b)$, $a < \xi < b$ în care derivata $F'(x)$ se anulează.

Să calculăm derivata $F'(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - f'(x) + \frac{b-x}{1!} f''(x) - \frac{b-x}{1!} f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) -$$

$$- \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) +$$

$$+ \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - p(b-x)^{p-1} \cdot A,$$

deci

$$F'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - p(b-x)^{p-1} \cdot A.$$

Pentru $x = \xi$, această derivată se anulează

$$0 = \frac{(b-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) - p(b-\xi)^{p-1} \cdot A, \qquad a < \xi < b,$$

relație din care scoatem pe A

$$A = \frac{(b-\xi)^{n-p+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

pe care dacă o introducem în (1) obținem formula lui Taylor

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{(b-\xi)^{n+1-p}(b-a)^p}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

unde ξ este un număr cuprins între a și b, $a < \xi < b$. Termenul R_n

$$R_n = \frac{(b-\xi)^{n+1-p}(b-a)^p}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2}$$

se numeşte restul de ordinul n al formulei lui Taylor sau restul lui Schlömlich-Roche.

Pentru $p = 1$ obţinem *restul lui Cauchy*:

$$R_n = \frac{(b-\xi)^n (b-a)}{n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

iar pentru $p = n + 1$ obţinem *restul lui Lagrange*:

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Cu ajutorul restului lui Lagrange, formula lui Taylor se scrie

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Dacă înlocuim pe b cu x, pentru orice $x \in [a, b]$ avem

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + (x-a)\theta),$$

unde de astă dată θ este un număr cuprins între 0 şi 1, $0 < \theta < 1$. În fine, dacă înlocuim pe b cu $x + a$, avem de asemenea

$$f(x+a) = f(a) + \frac{x}{1!} f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta x), \tag{3}$$

cu $0 < \theta < 1$.

Observaţii

1) În formula restului (2) ξ depinde de a, b, n şi p, deci în cele trei forme ale restului: Schlömlich, Cauchy sau Lagrange, ξ nu este acelaşi.

2) Dacă în formula lui Taylor facem $n = 0$, obţinem formula creşterilor finite a lui Lagrange:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(a + \theta(b-a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

3) Dacă *neglijăm* restul R_n, obţinem

$$f(x) \simeq f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

adică formula lui Taylor permite să aproximăm în intervalul $[a, b]$ funcția $f(x)$ cu un polinom de gradul n. Eroarea făcută prin această aproximare este dată de maximul lui $|R_n(x)|$ în $[a, b]$.

Dacă în formula lui Taylor (3) facem $a = 0$, obținem *formula lui Mac-Laurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n,$$

cu restul R_n dat de

$$R_n = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{pn!}f^{(n+1)}(\theta x) \text{ (Schlömlich)}$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x) \text{ (Cauchy)}$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \text{ (Lagrange)}$$

cu $0 < \theta < 1$; θ depinde de n și p și x.

Exemple

1) Pentru funcția $f(x) = a^x, a > 0, x \in R, f^{(n)}(x) = a^x \ln a,\ f^{(n)}(0) = \ln a$, formula lui Mac-Laurin cu restul lui Lagrange se scrie

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + \ldots + \frac{x^n}{n!}\ln^n a + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ln^{n+1} a \cdot a^{\theta x}.$$

Pentru $a = e$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

2) Pentru funcția $f(x) = \ln(ax + b),\ x > -\frac{b}{a},\ b > 0,\ f^{(n)}(x) =$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(ax+b)^n}a^n, \text{ avem } f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

deci

$$\ln(ax+b) = \ln b + \frac{x}{1}\cdot\frac{a}{b} - \frac{x^2}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\left(\frac{a}{b}\right)^n +$$

$$+ (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{a^{n+1}}{(a\theta x+b)^{n+1}},$$

iar dacă $a = 1,\ b = 1$,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(\theta x+1)^{n+1}}.$$

2. Rădăcinile multiple ale unei ecuații algebrice

Ne propunem să găsim condițiile necesare și suficiente pentru ca ecuația

$$P_n(x) = 0,$$

unde $P_n(x)$ este un polinom de gradul n, să admită rădăcina $x = a$ multiplă de ordinul m, adică să avem identitatea

$$P_n(x) \equiv (x-a)^m \, Q(x), \tag{1}$$

unde $Q(a) \neq 0$. Formula lui Taylor pentru polinomul $P_n(x)$ ne dă

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{x-a}{1!} P_n'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} P_n^{(n)}(a), \tag{2}$$

unde $P_n^{(n)}(x)$ este o constantă, deci $R_n \equiv 0$.

Pentru ca $P_n(x)$ să se scrie sub forma (1), adică $x = a$ să fie rădăcină multiplă de ordinul m, este necesar și suficient ca

$$P_n(a) = 0, \; P_n'(a) = 0, \ldots, P_n^{(m-1)} = 0, \; P_n^{(m)}(a) \neq 0.$$

Într-adevăr, dacă aceste condiții sînt satisfăcute, în descompunerea în factori a lui $P_n(x)$ apare termenul $x-a$ la puterea m, și *nu* la o putere mai mare sau mai mică.

Exemple

1) Să găsim condiția pe care trebuie s-o îndeplinească p și q astfel ca ecuația de gradul al treilea

$$x^3 + px + q = 0$$

să aibă o rădăcină dublă. Ecuația derivată $3x^2 + p = 0$ are rădăcinile $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$; rădăcina dublă nu poate fi decît reală, deci $p < 0$; înlocuind în ecuație

$$\pm\left(-\frac{p}{3}\right)\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0,$$

obținem condițiile

$$\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} - q = 0 \text{ sau } \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0,$$

echivalente cu

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0,$$

adică discriminantul trebuie să fie nul.

2) Să se rezolve ecuația $f(x) = 4x^4 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$, știind că are rădăcini multiple.

Trebuie găsit cel mai mare divizor comun al lui $f(x)$ și al derivatei $f'(x) = 16x^3 + 10x - 7$. Avem

$$4(4x^4 + 5x^2 - 7x + 2) \equiv (16x^3 + 10x - 7)x + 10x^2 - 21x + 8.$$

Restul împărţirii lui $16x^3 + 10x - 7$ cu $10x^2 - 21x + 8$ este $2x - 1$, care împarte exact pe $10x^2 - 21x + 8$, deci cel mai mare divizor comun căutat este $2x - 1$ şi rădăcina $x = \frac{1}{2}$ este dublă. Împărţind pe $f(x)$ cu $4x^2 - 4x + 1$, obţinem

$$f(x) \equiv (4x^2 - 4x + 1)(x^2 + x + 2).$$

Celelalte rădăcini sînt

$$x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

3. Convexitatea şi concavitatea unei curbe. Puncte de inflexiune

Fie $f: I \to R$ o funcţie derivabilă pe un interval I şi $a < b$ două puncte din I. Am arătat că dacă derivata $f'(x)$, $x \in [a, b]$ este strict pozitivă pe $[a, b]$

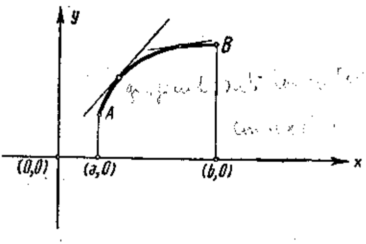


Fig. 94

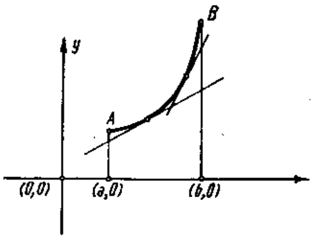


Fig. 95

atunci $f(x)$ este strict crescătoare pe $[a, b]$ şi dacă $f'(x)$ este strict negativă pe $[a, b]$ atunci $f(x)$ este strict descrescătoare pe $[a, b]$. Însă între punctele a, b funcţia poate să crească în diverse moduri. În figura 94 se vede că graficul funcţiei $f(x)$ în intervalul $[a, b]$ rămîne sub tangenta în fiecare punct $x \in [a, b]$. Spunem că în intervalul $[a, b]$ graficul este o *curbă convexă*. În figura 95 graficul funcţiei $f(x)$ în $[a, b]$ rămîne deasupra tangentei în fiecare punct $x \in [a, b]$. Spunem că în intervalul $[a, b]$ graficul este o curbă *concavă*. În fine, în figura 96, la stînga punctului x_0, funcţia

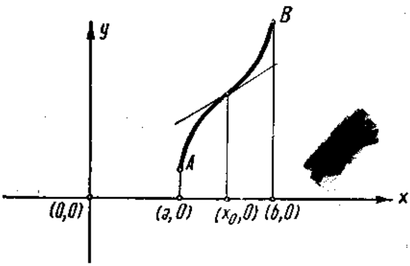


Fig. 96

este convexă, iar la dreapta punctului x_0, funcţia este concavă. Punctul x_0 se numeşte punct de *inflexiune*. Într-un punct de inflexiune, tangenta traversează curba.

Vom arăta că derivatele de ordin superior ne dau indicaţii precise în ce caz ne situăm.

Să considerăm funcţia f, derivabilă de $n+1$ ori într-un interval I, şi a un punct interior intervalului I. Vom studia mai întîi comportarea funcţiei f în vecinătatea punctului a. Ecuaţia tangentei în punctul a la grafic este

$$y - f(a) = (x-a)f'(a).$$

Prin urmare, dacă curba rămîne deasupra tangentei în vecinătatea punctului a, urmează că pentru h, suficient de mic, pozitiv sau negativ, diferenţa

$$E = f(a+h) - f(a) - hf'(a), \quad (x = a+h), \tag{1}$$

care reprezină segmentul BB'' sau CC'', după cum h este pozitiv sau negativ, este strict pozitivă (fig. 97).

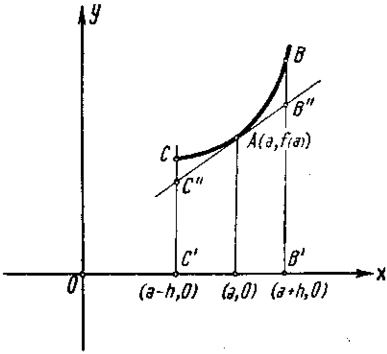


Fig. 97

Formula lui Taylor pentru funcţia $f(x)$, cu $x = a + h$, este

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

deci diferenţa (1) este dată de

$$E = \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Să presupunem acum că în punctul a avem

$$f''(a) = 0,\ f'''(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0, \tag{2}$$

astfel încît E rămîne

$$E = \frac{h^n}{n!}\left[f^{(n)}(a) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(\xi)\right].$$

În paranteză, pentru h suficient de mic, semnul este hotărît de $f^{(n)}(a) \neq 0$, care nu depinde de h, fiind o constantă; prin urmare, pentru ca diferenţa E să păstreze un semn constant, pentru h pozitiv sau negativ (suficient de mic), trebuie ca h^n să păstreze un semn constant, deci n trebuie să fie par. În consecinţă:

— dacă $f^{(n)}(a) > 0$, $n = 2m$, $E > 0$, deci în vecinătatea punctului a *curba este concavă*;

– dacă $f^{(n)}(a) < 0$, $n = 2m$, $E < 0$, deci în vecinătatea punctului a *curba este convexă.*

Să presupunem acum că $n = 2m + 1$, deci impar; semnul diferenței E depinde de h, și anume:

– dacă $f^{(n)}(a) > 0$, $n = 2m + 1$: $E > 0$ pentru $h > 0$ și $E < 0$ pentru $h < 0$; curba este concavă la dreapta punctului a și convexă la stînga punctului a;

– dacă $f^{(n)}(a) < 0$, $n = 2m + 1$: $E < 0$ pentru $h > 0$ și $E > 0$ pentru $h < 0$; curba este convexă la dreapta punctului a și concavă la stînga punctului a.

Deci și într-un caz și în celălalt curba schimbă de concavitate în vecinătatea lui a; *punctul a este un punct de inflexiune.*

Observații

1) Condițiile

$$f''(a) = 0,\ f'''(a) = 0,\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = 0$$

nu pot avea loc în toate punctele intervalului de definiție al funcției $f(x)$ fără ca $f(x)$ să se reducă la funcția liniară $Ax + B$; prin urmare, pentru orice altă funcție în afară de cea liniară avem $f''(x) \not\equiv 0$. Putem enunța următoarea

Teoremă. Fie f o funcție definită și derivabilă de două ori pe un interval I.

1) Dacă derivata f'' este pozitivă pe I, funcția f este concavă pe I.

2) Dacă derivata f'' este negativă pe I, funcția f este convexă pe I.

3) Dacă într-un punct x_0 interior lui I, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, punctul x_0 este un punct de inflexiune.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \sin x$, $x \in R$, are derivata a doua $f''(x) = -\sin x$ pozitivă în intervalele $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ și negativă în intervalele $[2k\pi, (2k+1)\pi]$; prin urmare, în intervalele $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ funcția $\sin x$ este concavă și în intervalele $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ este convexă. Punctele în care f'' se anulează sînt $x = k\pi$; derivata a treia $f'''(x) = -\cos x$ nu se anulează pentru $x = k\pi$, deci $x = k\pi$ sînt puncte de inflexiune.

2) Funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, are derivata a doua $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ negativă în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ și pozitivă în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; prin urmare, în primul interval funcția $\operatorname{tg} x$ este convexă și în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ concavă. Punctul $x = 0$ este un punct de inflexiune, deoarece derivata a treia nu se anulează în acest punct.

4. Condițiile necesare și suficiente de extremum

Știm că punctele de extremum ale unei funcții se găsesc printre punctele care anulează derivata întîi. Condițiile necesare și suficiente de extremum se obțin cu ajutorul derivatelor de ordin superior.

T e o r e m ă. Fie f o funcţie derivabilă de $n+1$ ori, $n \geqslant 2$ într-un punct $a \in I$, astfel încît

$$f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ldots,\ f^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n)}(a)\neq 0.$$

1) Dacă $n=2m$ şi $f^{(n)}(a)<0$, atunci a este punct de maxim.

2) Dacă $n=2m$ şi $f^{(n)}(a)>0$, atunci a este punct de minim.

3) Dacă $n=2m+1$ şi a este un punct interior intervalului I, atunci a nu este punct de extremum pentru funcţia f. Punctul a este un punct de inflexiune.

Demonstraţie. Folosind formula lui Taylor şi ţinînd seama de condiţiile din enunţ, avem

$$f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a)+\frac{x-a}{n+1}f^{(n+1)}(\xi)\right],$$

deci, pentru ca să existe o vecinătate V a lui a astfel încît diferenţa $f(x)-f(a)$ să păstreze un semn constant pentru $x\in V\cap I$, trebuie ca n să fie par, deoarece, pentru x suficient de aproape de a, $f^{(n)}(a)\neq 0$ şi paranteza are semnul lui $f^{(n)}(a)$. Prin urmare, dacă:

1) $n=2m$ şi $f^{(n)}(a)>0$,

punctul a este un punct de minim;

2) $n=2m$ şi $f^{(n)}(a)<0$,

punctul a este un punct de maxim;

3) $n=2m+1$ şi $f^{(2m+1)}(a)\neq 0$,

diferenţa $f(x)-f(a)$ schimbă de semn după cum x se găseşte la dreapta lui a sau la stînga lui a. Punctul a este punct de inflexiune. Tangenta la curbă în punctul $x=a$ este paralelă cu axa Ox şi traversează curba. Teorema este demonstrată.

E x e m p l e

1) Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic funcţia $y=e^{-x^2}$; să se găsească şi punctele de inflexiune.

Domeniul de existenţă este $(-\infty, +\infty)$. Funcţia este tot timpul pozitivă, e simetrică faţă de axa Oy şi are asimptota $x=0$;

$$y'=-2xe^{-x^2},\ y'=0,\ x=0;\ y''=(4x^2-2)e^{-x^2},\ y''=0,\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

În intervalul $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ este convexă; în afara acestui interval e concavă.

Tabelul de variație conține încă o linie, a semnului și valorilor derivatei a doua.
Graficul este dat în figura 98.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$+\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'	+	+	+	+ +	0	— — —	—	— — —	—
y''	+	+ +	0	— — —	—	— — —	0	+ +	+
y	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘	0

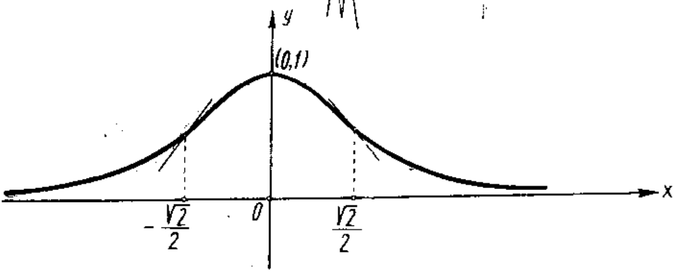


Fig. 98

Curba se numește „curba erorilor" sau „clopotul lui Gauss" și se întîlnește în teoria distribuției erorilor.

2) Într-un con circular drept cu raza bazei de 3 m și înălțimea de 4 m se înscrie un cilindru de înălțime x, iar în conul rămas, care are ca bază baza superioară a cilindrului, se înscrie o sferă (fig. 99).

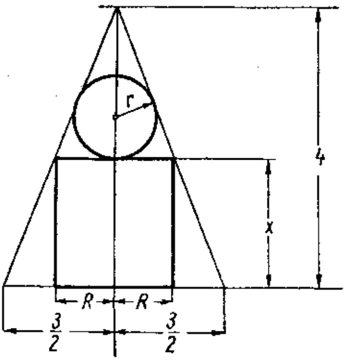


Fig. 99

Să se găsească înălțimea x pentru care suma volumelor cilindrului și sferei este maximă.

Raza R a cilindrului și raza r a sferei sînt $R = \frac{3}{4}(4 - x)$

$$r = \frac{(4 - x)R}{R + \sqrt{R^2 + (4 - x)^2}} = \frac{3}{8}(4 - x).$$

Suma celor două volume o notăm $V(x)$

$$V(x) = \frac{9}{16}\pi x(4 - x)^2 +$$

$$+ \frac{9}{128}\pi(4 - x)^3 = \frac{9}{128}\pi(4 - x)^2(4 + 7x)$$

$$V'(x) = \frac{9}{128}\pi(4-x)[-8-14x+28-7x] = 0,\ x' = 4,\ x'' = \frac{20}{21}$$

$$V''(x) = \frac{9}{128}\pi(-20+21x-84+21x) = \frac{9}{128}(42x-104).$$

Pentru $x = \frac{20}{21}$, avem un maxim, deoarece $V''\left(\frac{20}{21}\right) < 0$.

3) Să se găsească valorile maxime sau minime ale funcției $y = x^n e^x$

$$y' = x^{n-1}(n+x)e^x,\ y'' = x^{n-2}[n(n-1)+2nx+x^2]e^x$$

$$y^{(n)} = n!\,e^x\left(1 + C_n^1 \cdot \frac{x}{1!} + C_n^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots + C_n^n \cdot \frac{x^n}{n!}\right).$$

Pentru $x = 0$, $y^{(n)} > 0$; deci pentru n par avem un minim, iar pentru n impar un punct de inflexiune.

Pentru $x = -n$, $y'' = (-n)^{n-1} e^{-n}$; dacă n este par avem un maxim, iar dacă n este impar, un minim.

§ 9. APROXIMAREA RĂDĂCINILOR IRAȚIONALE ALE UNEI ECUAȚII

1. Metoda tangentelor sau metoda lui Newton

Fie $f(x) = 0$ o ecuație pentru care știm că în intervalul (a, b) are o rădăcină reală x_0. Putem micșora intervalul (a, b) astfel încît în acest interval derivata a doua să păstreze un semn constant. Vom avea următoarele patru posibilități (fig. 100):

Dacă notăm $x_0 = a + h = b - k$ $(b > a)$, după formula lui Taylor avem

$$0 = f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots$$

$$0 = f(b-k) = f(b) - \frac{k}{1!}f'(b) + \frac{k^2}{2!}f''(b) - \ldots$$

Metoda tangentelor constă în a neglija puterile h^m, $m \geqslant 2$ și a determina în prima aproximație pe h sau k din relațiile

$$f(a) + h_1 f'(a) = 0$$

$$f(b) - k_1 f'(b) = 0 \qquad (1)$$

Avem, așadar,

$$h_1 = -\frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad k_1 = \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Numerele $a+h_1$, $b-k_1$ au următoarea semnificaţie geometrică. Tangenta în punctul $[a, f(a)]$ la curba $y = f(x)$ are ecuaţia

$$y-f(a) = f'(a)(x-a),$$

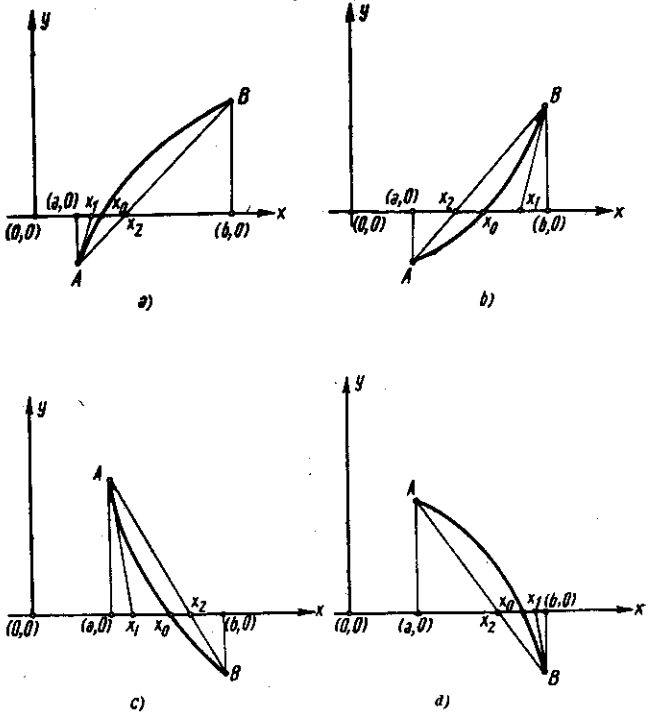


Fig. 100

iar punctul de intersecţie al tangentei cu axa Ox are abscisa

$$x_1 = -\frac{f(a)}{f'(a)} + a = a + h_1.$$

Tot astfel, tangenta în punctul $[b, f(b)]$ la curba $y = f(x)$ are ecuaţia

$$y-f(b) = f'(b)(x-b)$$

și punctul de intersecție al tangentei cu axa Ox are abscisa

$$x_2 = b - \frac{f(b)}{f'(a)} = b - k_1.$$

Deci în metoda tangentei se aproximează rădăcina x_0 cu abscisa punctului de intersecție al tangentei în A sau B cu axa Ox (curba se înlocuiește cu tangenta).

Din figura 100 se vede însă că nu putem alege la întîmplare punctul A sau B. În cazurile a și c, tangenta în punctul A dă rezultat favorabil, iar în punctul B nu, pe cînd în cazurile b și d, tangenta în punctul B taie axa Ox într-un punct de abscisa x_1, care se apropie de rădăcina x_0, pe cînd tangenta în punctul A nu.

Pentru ca $a + h$ să fie mai aproape decît a de punctul x_0, trebuie ca șirul

$$a,\ a + h_1,\ x_0 = a + h$$

să fie crescător. Tot astfel, pentru ca $b - k_1$ să fie mai aproape de x_0 decît punctul b, trebuie ca șirul

$$x_0 = b - k,\ b - k_1,\ b_1$$

să fie crescător. Aceste condiții se mai pot scrie

$$h_1(h - h_1) > 0$$

$$k_1(k - k_1) > 0,$$

deoarece diferența dintre termenul al doilea și primul trebuie să aibă același semn ca diferența dintre al treilea și al doilea. Cum putem scrie

$$f(a + h) = 0 = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \qquad a < \xi < a + h$$

$$f(b - k) = 0 = f(b) - kf'(b) + \frac{k^2}{2} f''(\xi'), \qquad b - k < \xi' < b$$

$$h - h_1 = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(a)}$$

$$k - k_1 = -\frac{k^2}{2} \cdot \frac{f''(\xi')}{f'(b)},$$

urmează că

$$h_1(h - h_1) = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{f(a) f''(\xi)}{f'^2(a)}$$

$$k_1(k - k_1) = -\frac{k^2}{2} \cdot \frac{f(b) f''(\xi')}{f'^2(b)}.$$

Prin urmare, metoda tangentei aplicată în punctul A ($a < b$) ne apropie de punctul x_0 (prin lipsă) dacă $f(a)$ și $f''(\xi)$ au același semn.

Deoarece $f(a) \cdot f(b) < 0$, urmează că, dacă această condiție nu este îndeplinită în punctul A, atunci este sigur îndeplinită în punctul B și aplicăm metoda tangentei în punctul B.

2. Metoda coardelor

Metoda constă în a aproxima curba $y = f(x)$ cu coarda care unește punctele A, B. Dreapta AB are ecuația

$$y-f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

iar intersecția cu Ox ne dă punctul de abscisă x_2

$$x_2 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Se observă din figura 100 că în toate cazurile metoda coardelor este complementară metodei tangentelor, și anume dacă una ne dă o valoare aproximativă x_1 prin lipsă (sau exces) cealaltă ne dă valoarea x_2 prin exces (sau lipsă).

Exemplu

Să se afle rădăcina reală a ecuației

$$f(x) = x^2 - 3x + \ln x = 0,$$

cu două zecimale exacte. Derivata lui $f(x)$ este

$$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x}$$

și se anulează pentru $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = 1$. Șirul lui Rolle

$$\begin{matrix} f(0+0) & f\left(\frac{1}{2}\right) & f(1) & f(+\infty) \\ - & - & - & + \end{matrix}$$

ne spune că ecuația are o singură rădăcină reală ξ, și anume $\xi > 1$. Avem $f(2) = -2 + \ln 2 < 0$, $f(3) = \ln 3 > 0$, deci rădăcina este cuprinsă între 2 și 3. În acest interval, derivata a doua

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2-1}{2} > 0$$

este pozitivă, deci metoda lui Newton aplicată în punctul $(3, f(3) = 1{,}10)$ ne apropie de rădăcină.

Folosim atît metoda tangentei cît și cea a coardei:

$$k_1 = \frac{f(3)}{f'(3)} \cong \frac{1{,}10}{3{,}33} \simeq 0{,}3$$

$$h_1 = \frac{f(2)}{f(3)-f(2)} \cong \frac{1{,}31}{1{,}10-1{,}31} \cong 0{,}6.$$

Rădăcina ξ se găsește între 2,6 și 2,7. Mai aplicăm o dată cele două metode

$$f\,(2{,}6) = -0{,}08, \qquad f\,(2{,}7) = 0{,}18$$

$$h_2 = \frac{0{,}1 \times 0{,}08}{0{,}26} = 0{,}03, \qquad k_2 = \frac{0{,}18}{2{,}8} = 0{,}06$$

Rădăcina ξ se găsește între

$$2{,}63 \text{ și } 2{,}64,$$

deci 2,63 este rădăcina căutată, cu două zecimale exacte (prin lipsă).

3. Metoda aproximațiilor succesive sau metoda iterației

Fie $f\,(x) - x = 0$ o ecuație cu funcția f continuă și derivabilă într-un interval $(a,\ b)$. Ecuația $x = f\,(x)$ are o singură rădăcină în $(a,\ b)$ dacă $|f'\,(x)| \leqslant k < 1$ pentru orice $x \in (a, b)$, iar $f\,(a) \cdot f(b) < 0$. Într-adevăr, nu poate avea două rădăcini x_0 și x_1, deoarece din

$$x_0 = f\,(x_0), \;\; x_1 = f\,(x_1)$$

avem

$$x_1 - x_0 = f\,(x_1) - f\,(x_0) = (x_1 - x_0)\;f'\,(\xi), \qquad \xi \in (x_0,\ x_1).$$

Însă egalitatea nu poate să aibă loc pentru $x_1 \neq x_0$, pentru că simplificînd cu $x_1 - x_0$ ajungem la

$$f'\,(\xi) = 1,$$

ceea ce este contrar ipotezei.

a) *Ne propunem să dăm un procedeu de calcul al rădăcinii.* Fie x_0 un punct *oarecare* situat între a și b, $a < x_0 < b$, și să considerăm șirul următor

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f\,(x_1) \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= f\,(x_{n-1}) \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

A arăta că acest șir are o limită λ înseamnă a arăta că seria

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots \tag{1}$$

este convergentă, deoarece suma parțială de ordinul $n+1$, S_{n+1} este

$$S_{n+1} = x_0 + (x_1 - x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n.$$

Să observăm că putem scrie folosind formula creșterilor finite

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= f\,(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0)f'\,(\xi_1) \\ x_3 - x_2 &= f\,(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\,f'\,(\xi_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - x_{n-1} &= f\,(x_{n-1}) - f\,(x_{n-2}) = (x_{n-1} - x_{n-2})f'\,(\xi_{n-1}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Dacă toți termenii șirului (x_n) se găsesc în intervalul (a, b), atunci

$$
\begin{aligned}
&|x_2-x_1| = |x_1-x_0|\cdot|f'(\xi_1)| < |x_1-x_0|\cdot k\\
&|x_3-x_2| = |x_2-x_1|\cdot|f'(\xi_2)| < |x_1-x_0|\cdot k^2 \qquad (3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|x_n-x_{n-1}| = |x_{n-1}-x_{n-2}|\cdot|f'(\xi_{n-1})| < |x_1-x_0|\cdot k^{n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

și, deoarece $k<1$, urmează că seria (1) este absolut convergentă; dacă λ este suma seriei (1)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda .$$

Să arătăm acum că într-adevăr toți termenii șirului (x_n) se găsesc în intervalul (a, b). Să luăm pe $x_0 \in (a, b)$, astfel încît

$$x_1 = f(x_0) \in (a, b).$$

Avem

$$\lambda - x_1 = f(\lambda) - f(x_0) = (\lambda - x_0) f'(\xi_0), \qquad a < \xi_0 < b,$$

deci

$$|\lambda - x_1| < |\lambda - x_0|\cdot k < |\lambda - x_0|,$$

de unde rezultă că punctul x_1 este mai aproape decît x_0 de rădăcina λ. Să presupunem acest fapt adevărat pînă la $n-1$, deci

$$|\lambda - x_{n-1}| < |\lambda - x_{n-2}| < \ldots < |\lambda - x_0| .$$

Avem

$$\lambda - x_n = f(\lambda) - f(x_{n-1}) = (\lambda - x_{n-1})\, f'(\xi_{n-1})$$

și pentru că x_{n-1} se găsește în intervalul (a, b), $\xi_{n-1} \in (a, b)$, deci $|f'(\xi_{n-1})| \leqslant k < 1$, atunci

$$|\lambda - x_n| < |\lambda - x_{n-1}|\cdot k < |\lambda - x_{n-1}| .$$

Prin urmare, toți termenii șirului (x_n) se găsesc în intervalul (a, b).

b) *Să arătăm că numărul λ, suma seriei (1), este rădăcina căutată.* Într-adevăr avem

$$x_n = f(x_{n-1})$$

și, cum $f(x)$ este continuă, urmează că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lambda).$$

și soluția găsită verifică ecuația. *Valoarea aproximativă* x_n calculată pe această cale este cu atît mai bună cu cît n este mai mare; metoda prezentată se numește *metoda aproximațiilor succesive* sau *metoda iterației.*

c) *Evaluarea erorii.* Restul seriei

$$x_0 + (x_1 - x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots$$

este

$$R_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \ldots$$

și, cum

$$|x_{n+2}-x_{n+1}| < |x_{n+1}-x_n| \cdot k,$$

urmează că

$$R_{n+1} < |x_{n+1}-x_n| \cdot (1+k+k^2+\ldots) = |x_{n+1}-x_n| \cdot \frac{1}{1-k}$$

sau

$$|R_{n+1}| < \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0|,$$

care ne dă o *majorantă a erorii comise* dacă în loc de rădăcina λ luăm pe x_n.

Observație

Din egalitățile (1) urmează că dacă $f'(x) > 0$, $x \in (a, b)$ și (a, b) este suficient de mic, astfel încît f' să păstreze un semn constant, diferențele $x_k - x_{k-1}$ păstrează un semn constant, deci dacă x_0 va fi o valoare prin adaos a lui λ toate valorile $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ vor fi valori prin adaos. Dacă $f'(x) < 0$, $x \in (a, b)$, atunci diferențele $x_{k+1} - x_k$, $x_{k+2} - x_{k+1}$ sînt de semne contrare, deci, dacă x_k va aproxima prin adaos rădăcina λ, x_{k+1} o va aproxima prin lipsă.

Exemplu

Ecuația $\sin^4 u + 4 \sin u - 1 = 0$ are o singură rădăcină, cuprinsă între 0 și $\frac{\pi}{2}$. Să se calculeze valoarea lui u cu aproximație de o secundă de arc.

Punem $\sin u = x$, $F(x) = x^4 + 4x - 1$; $F(0) = -1$, $F(1) = 4$. deci $F(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină reală cuprinsă între 0 și 1. $F'(x) = 4x^3 + 4$ este strict pozitivă pentru $x \in (0, 1)$. deci $F(x) = 0$ are o singură rădăcină reală în intervalul $(0, 1)$. Pentru aproximarea rădăcinii vom folosi metoda aproximațiilor succesive.

Ecuația o scriem sub forma

$$x = \frac{1}{4}(1 - x^4), \qquad f(x) \equiv \frac{1}{4}(1 - x^4),$$

$f'(x) = -x^3 < 0$ pentru $x \in (0, 1)$; $|f'(x)| < 1$ pentru $x \in (0, 1)$.

Luăm pentru x_0 valoarea $\frac{1}{4}$, deoarece curbele $y = \frac{1}{4} x^4$ și $y = \frac{1}{4} - x$ se taie într-un punct cu abscisa apropiată de $x_0 = \frac{1}{4}$, după cum se poate verifica grafic. Avem

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4^4}\right) = 0{,}249024.$$

Derivata fiind negativă, urmează că

$$0{,}249024 < \lambda < 0{,}25,$$

deci am găsit pe $\lambda \simeq 0{,}249$ cu trei zecimale exacte. În continuare,

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{4}(1 - 0{,}249024^4) = 0{,}2490386,$$

deci

$$0{,}249024 < \lambda < 0{,}2490386$$

şi am găsit astfel pe $\lambda \simeq 0{,}2490$ cu patru zecimale exacte. Aproximaţia a treia

$$x_3 = f(x_2) = \frac{1}{4}\,(1 - 0{,}2490386^4) = 0{,}2490384$$

ne dă pe λ cu 6 zecimale exacte, *prin lipsă*,

$$\lambda \simeq 0{,}249038.$$

Revenind la unghiul u, se găseşte

$$u = 14^\circ\ 25'\ 13''.$$

cu aproximaţie de $1''$ prin lipsă.

Capitolul V

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII. SERII DE PUTERI

§ 1. ŞIRURI DE FUNCŢII

1. Şiruri de funcţii. Mulţimea de convergenţă

Să considerăm o familie de funcţii $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ definite pe o aceeaşi mulţime X. Dacă mulţimea indicilor I este mulţimea numerelor naturale, avem un şir de funcţii

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

Un şir de funcţii îl vom nota (f_n).

Definiţie. Un punct $a \in X$ este un punct de convergenţă al şirului de funcţii (f_n) dacă şirul numeric $(f_n(a))$ este convergent.

Mulţimea punctelor de convergenţă ale şirului de funcţii (f_n) se numeşte mulţimea de convergenţă a şirului (f_n).

Exemple

1) Şirul de funcţii $f_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, are mulţimea de convergenţă intervalul $[-1, +1]$.

2) Şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$ are mulţimea de convergenţă R.

2. Funcţia limită a unui şir de funcţii

Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe o aceeaşi mulţime X şi Z mulţimea de convergenţă a şirului. Dacă notăm cu $f(x)$, pentru orice $x \in Z$, limita şirului de numere $(f_n(x))$ am stabilit o corespondenţă

$$x \to f(x)$$

a mulţimii Z în mulţimea R a numerelor reale. Funcţia $f(x)$, definită de

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in Z,$$

se numeşte *funcţia limită* pe mulţimea Z a şirului de funcţii (f_n).

Exemple

1) Şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ are mulţimea de convergenţă $(-\infty, +\infty)$ şi pentru orice x din mulţimea de convergenţă

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

deci funcţia limită a şirului $f_n(x)$ este funcţia $f(x) \equiv 0$.

2) Şirul de funcţii $f_n(x) = a^{\frac{nx+1}{n+2}}$, $n \in N$, $a > 0$, este convergent pentru orice $x \in R$ şi are funcţia limită

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = a^x, \qquad x \in R.$$

3. Convergenţa simplă

Definiţie. Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe o mulţime X.

Se spune că şirul de funcţii (f_n) este simplu convergent pe X către f dacă, oricare ar fi $x \in X$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon, x)$ astfel încît să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pentru orice $n > N(\varepsilon, x)$.

Din definiţie rezultă că numărul N depinde atît de numărul ε cît şi de numărul x.

Exemplu

Şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{x^4}{n^2}$ definit pe R este convergent pe R către funcţia $f(x) \equiv 0$. Ne propunem să găsim pe $N(\varepsilon, x)$. Trebuie să avem $\frac{x^4}{n^2} < \varepsilon$, deci $n^2 > \frac{x^4}{\varepsilon}$; prin urmare, $N(\varepsilon, x) = \frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}}$.

4. Convergenţa uniformă

Definiţie. Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe o mulţime X.

Se spune că şirul de funcţii (f_n) este uniform convergent pe X către funcţia f dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oricare ar fi $x \in X$.

Observaţii

1) În definiţia convergenţei uniforme, numărul $N(\varepsilon)$ depinde numai de ε şi este acelaşi pentru orice $x \in X$, adică este independent de x.

2) Un şir de funcţii uniform convergent este şi simplu convergent. Reciproca nu este în general adevărată.

Exemple

1) Şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{x^4}{n^2}$, cu f_n definite pe intervalul $[-1, +1]$, este uniform convergent pe acest interval.

Funcţia limită este $f(x) \equiv 0$. Pentru convergenţa simplă trebuie ca $N(\varepsilon, x) = \frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}}$. Dacă luăm $N(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, avem

$$\frac{x^4}{n^2} < \varepsilon$$

pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in [-1, +1]$.

2) Şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1}$, $x \in [0, \pi]$ este uniform convergent către $f(x) \equiv 0$.

Într-adevăr,

$\frac{\cos nx}{n^2+1} < \varepsilon$ dacă $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$ sau $n^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon < 1$; prin urmare, $N(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$

Pentru stabilirea convergenţei uniforme a unui şir de funcţii avem următoarea

Teoremă. Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe o mulţime X şi f o funcţi[e] definită pe mulţimea X.

Dacă există un şir (a_n) de numere pozitive convergent către zero, astfe[l] încît să avem pentru orice n natural

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n,$$

oricare ar fi $x \in X$, atunci şirul (f_n) este uniform convergent pe mulţimea X către funcţia f.

Demonstraţie. Şirul (a_n) are limita zero, deci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem $a_n < \varepsilon$; prin urmare cu atît mai mult

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi $x \in X$, deci şirul (f_n) converge uniform pe X către funcţia f.

Exemple

1) Şirul $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \in R$, este uniform convergent pe R către funcţia $(x) \equiv 0$. Într-adevăr

$$\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \to 0 \text{ dacă } \alpha > 0, \text{ pentru orice } x \in R.$$

2) Şirul $f_n(x) = \dfrac{x(1+n^2)}{n^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, este uniform convergent către $f(x) \equiv x$ pe intervalul $[0,1]$.

Într-adevăr, $f_n(x) - f(x) = \dfrac{x(1+n^2)}{n^2} - x = \dfrac{x}{n^2}$,

deci

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n^2} \to 0 \text{ pentru orice } x \in [0,1].$$

5. Şiruri uniform convergente

În legătură cu şirurile uniform convergente de funcţii vom demonstra două teoreme fundamentale privind continuitatea şi derivabilitatea funcţiei limită.

T e o r e m a. 1. Fie (f_n) un şir uniform convergent pe mulţimea X către funcţia f. Funcţia limită f este continuă într-un punct $x_0 \in X$ dacă toate funcţiile şirului (f_n) sînt continue în punctul x_0.

Demonstraţie. Şirul (f_n) fiind uniform convergent pe X către funcţia f, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in X.$$

În particular şi

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Funcţia $f_n(x)$ fiind continuă în punctul x_0, există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru $x \in V \cap X$ avem

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Din egalitatea

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)$$

obţinem

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|,$$

deci

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

ceea ce dovedeşte continuitatea funcţiei limită $f(x)$ în punctul x_0. Teorema e demonstrată.

C o n s e c i n ţ ă. Un şir (f_n) de funcţii continue pe X, uniform convergent pe X, are limita o funcţie continuă pe X.

Exemplu

1) Şirul $f_n(x) = \dfrac{x^2(1+n^2)}{n^2}$, $n \in N$, $x \in [0,1]$ este uniform convergent către funcţia $f(x) = x^2$ pe $[0,1]$ şi funcţiile f_n sînt continue pe $[0,1]$. Funcţia limită este continuă pe $[0,1]$.

T e o r e m a 2. Fie (f_n) un şir de funcţii definite şi derivabile pe un interval mărginit I, uniform convergent către f pe I. Dacă şirul (f'_n) format cu derivatele termenilor şirului (f_n) este uniform convergent către o funcţie g pe intervalul I, atunci f este derivabilă pe I şi $f' = g$ pe I.

Demonstraţie. Fie x_0 un punct oarecare din I. Să arătăm că f este derivabilă în punctul x_0 şi $f'(x_0) = g(x_0)$. Şirul (f'_n) fiind uniform convergent pe I, urmează că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ avem

$$| f'_n(x) - g(x) | < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in I.$$

Funcţia $f_n(x)$ fiind continuă şi derivabilă pe I, urmează că există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru acelaşi $\varepsilon > 0$ ales mai sus să avem

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f'_n(x_0) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in I$ şi orice $n > N(\varepsilon)$. Din egalitatea

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0} \right| =$$
$$= | f'_n(c) - f'_m(c) |$$

obţinută aplicînd formula creşterilor finite, cînd $m \to \infty$, rezultă

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant \varepsilon,$$

deoarece şirul $(f'_n(c))$ este convergent în punctul $c \in I$. Într-adevăr, pentru orice $n > N'(\varepsilon)$, $m > N'(\varepsilon)$, $N'(\varepsilon) \geqslant N(\varepsilon)$, conform criteriului general al lui Cauchy pentru şiruri, avem

$$| f'_n(c) - f'_m(c) | < \varepsilon.$$

Din egalitatea

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}+$$
$$+\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}-f_n'(x_0)+f_n'(x_0)-g(x_0)$$

obţinem

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)\right|\leqslant\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right|+$$
$$+\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}-f_n'(x_0)\right|+|f_n'(x_0)-g(x_0)|,$$

deci pentru orice $x\in V$ şi $n>N'(\varepsilon)$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)\right|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

Prin urmare,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g(x_0) \text{ pentru orice } x_0\in I.$$

Am arătat astfel că funcţia $f(x)$ este derivabilă pe I şi derivata sa este $g(x)$; teorema este demonstrată.

Exemplu

Şirul $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^3}$, $x\in[0,2\pi]$ este uniform convergent pe $[0,2\pi]$, cu funcţia limită $f(x)\equiv 0$, deoarece $\left|\dfrac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^3}\to 0$, cînd $n\to\infty$. Şirul format cu derivatele $f_n'(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2}$ este de asemenea uniform convergent pe $[0,2\pi]$ către funcţia limită $f'(x)\equiv 0$.

Observaţie

Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Un şir (f_n) poate fi uniform convergent către f, cu f_n derivabile şi f derivabilă, fără ca şirul (f_n') să fie uniform convergent.

Exemplu

Şirul $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in[0,2\pi]$ este uniform convergent pe $[0,2\pi]$ către funcţia $f(x)\equiv 0$, termenii şirului şi funcţia limită sînt derivabili pe $[0,2\pi]$, însă şirul derivatelor $f_n'=\cos nx$ nu este convergent pe $[0,2\pi]$. Într-adevăr, pentru $x=\dfrac{\pi}{2}$, şirul valorilor

$$0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots$$

nu este convergent.

§ 2. SERII DE FUNCŢII

1. Serii de funcţii. Mulţimea de convergenţă

Definiţie. Seria

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots,$$

unde $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ este un şir de funcţii definite pe aceeaşi mulţime X, se numeşte serie de funcţii. O serie de funcţii se notează $\sum_1^\infty f_n$ sau numai $\sum f_n$.

Pentru orice $x_0 \in X$ avem seria de numere

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots,$$

formată cu valorile şirului (f_n) în punctul $x_0 \in X$, serie care poate fi convergentă sau divergentă.

Definiţie. Mulţimea punctelor $x \in X$ pentru care seria $\sum f_n$ este convergentă se numeşte mulţimea de convergenţă a seriei $\sum f_n$.

Dacă considerăm şirul sumelor parţiale

$$\begin{aligned} &S_1 = f_1 \\ &S_2 = f_1 + f_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

urmează că seria $\sum_1^\infty f_n$ este convergentă în punctul $x_0 \in X$ dacă şirul de funcţii al sumelor parţiale (S_n) este convergent în punctul x_0. Mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii a sumelor parţiale (S_n) este mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_1^\infty f_n$.

Exemplu

Cu şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $x \in R$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ să formăm seria de funcţii

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Mulţimea de convergenţă a seriei obţinute este $(-\infty, +\infty)$.

2. Convergenţa simplă a seriilor de funcţii

D e f i n i ţ i a 1. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un şir de funcţii definite pe aceeaşi mulţime X şi f o funcţie definită pe X. Se spune că seria de funcţii

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

este simplu convergentă pe X către funcţia f dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este simplu convergent către funcţia f pentru orice $x \in X$.

Funcţia f definită pe X se numeşte suma seriei $\sum_1^\infty f_n$ pe mulţimea X.

Folosind definiţia cu ε a convergenţei şirului (S_n) către funcţia f pe mulţimea X, avem următoarea definiţie echivalentă

D e f i n i ţ i a 2. Seria de funcţii

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

este simplu convergentă pe mulţimea X către funcţia f dacă la orice număr $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $x \in X$ există un număr $N(\varepsilon, x)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon, x)$ să avem

$$|f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

E x e m p l u

Seria de funcţii

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots, x \in R,$$

este simplu convergentă pentru orice $x \in R$. Într-adevăr, şirul sumelor parţiale (S_n) este majorat pentru orice $x \in R$ de şirul

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},$$

care este convergent, deoarece seria lui Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cu $\alpha > 1$ este convergentă. Seria de funcţii este şi *absolut convergentă* pentru orice $x \in R$, deoarece sumele parţiale ale seriei modulelor

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2x}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| + \ldots$$

admit majorante pe u_n.

3. Convergenţa uniformă a seriilor de funcţii

D e f i n i ţ i a 1. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un şir de funcţii definite pe aceeaşi mulţime X şi f o funcţie definită pe mulţimea X. Se spune că seria de funcţii

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

este uniform convergentă pe X către funcția f dacă șirul sumelor parțiale (S_n) este uniform convergent către funcția f pe mulțimea X.

Folosind definiția cu ε a convergenței uniforme a șirului (S_n) către funcția f pe mulțimea X, avem următoarea definiție echivalentă

Definiția 2. Seria de funcții

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$$

este uniform convergentă către funcția f pe mulțimea X dacă la orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $x \in X$.

Din definiție rezultă că numărul $N(\varepsilon)$ depinde de ε și este independent de $x \in X$, adică este același pentru orice x din mulțimea X.

Exemplu

Seria $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ cu funcțiile $f_n(x) = x^n$ definite pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ este uniform convergentă pe acest interval.

Șirul sumelor parțiale

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} + \frac{x^{n+1}}{x - 1}$$

este uniform convergent către $f(x) \equiv \frac{1}{1-x}$. Într-adevăr,

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| < \varepsilon$$

pentru $\left| \frac{x^{n+1}}{x-1} \right| < \varepsilon$ sau $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$ sau $n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$, deci putem lua $N(\varepsilon) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$ pentru orice $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Definiție. Se numește restul de rang n al seriei $\sum_1^\infty f_n$ seria

$$f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_{n+p} + \dots$$

și se notează cu R_n.

Mulțimea de convergență a seriei f_n este și mulțimea de convergență a seriei R_n. Avem însă următoarea teoremă reciprocă, analogă unei teoreme [*B*, cap. I, § 7, al. 2] de la seriile numerice.

Teoremă. Condiția necesară și suficientă pentru ca seria $\sum_1^\infty f_n$ să fie uniform convergentă pe mulțimea X este ca restul sau R_n pentru orice $n > N$ să fie uniform convergent pe mulțimea X.

Demonstraţie. Fie

$$S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$
$$\sigma_p = f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+p}$$

sumele parţiale ale seriilor de funcţii $\sum\limits_{1}^{\infty} f_n$ şi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{n+k}$.

Din egalitatea

$$S_{n+p} = S_n + \sigma_p$$

rezultă că şirul de funcţii (S_{n+p}), $p = 1, 2, 3, \ldots$ este uniform convergent pe mulţimea X dacă şirul (σ_p), $p = 1,2, \ldots$ este uniform convergent pe mulţimea X.

Observaţii

1) Teorema enunţată mai sus este adevărată şi pentru convergenţa simplă.

2) Dacă notăm cu f suma seriei $\sum\limits_{1}^{\infty} f_n$ şi cu R_n restul său de rang n, urmează că avem

$$f = S_n + R_n,$$

de unde rezultă că şirul (S_n) este uniform convergent (sau simplu convergent) către funcţia f pe mulţimea X dacă şi numai dacă restul R_n este uniform (sau simplu) convergent către zero pe mulţimea X.

Exemplu

Seria $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} + \ldots$ cu şirul funcţiilor $f_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ definite pe $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ este uniform convergentă pe $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Pentru orice $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ seria este alternată,

$$|R_n(x)| < \frac{x^{2n+2}}{2n+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+2} \frac{1}{2n+2} \to 0 \text{ pentru } n \to \infty,$$

deci seria este uniform convergentă pe mulţimea de definiţie.

4. Un criteriu de convergenţă uniformă

Teoremă. Fie

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

o serie de funcţii definite pe o mulţime X şi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

o serie de numere pozitive, convergentă. Dacă pentru orice $n > N$ și orice $x \in X$ avem

$$|f_n(x)| < a_n,$$

atunci seria $\sum_1^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea X.

Demonstrație. Seria $\sum_1^{\infty} a_n$ de numere pozitive fiind convergentă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ avem

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots < \varepsilon,$$

însă

$$\left|\sum_1^{\infty} f_{n+k}(x)\right| < \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n+k}(x)| < \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} < \varepsilon$$

pentru $n > N(\varepsilon)$ și orice $x \in X$; prin urmare, seria de funcții este uniform convergentă pe mulțimea X.

Exemplu

Să considerăm șirul de funcții (f_n) cu $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, $x \in (1, \infty)$; seria

$$1 + \frac{1}{2^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots$$

este uniform convergentă pentru orice $x \in (1, +\infty)$, deoarece, oricare ar fi $x \in (1, +\infty)$, există $a \in (1, +\infty)$ cu $a < x$, $a > 1$, deci

$$\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a}$$

și seria $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este seria lui Riemann cu $a > 1$, care este convergentă.

5. Serii de funcții uniform convergente

În legătură cu seriile de funcții uniform convergente vom da două teoreme fundamentale privind continuitatea și derivabilitatea funcției limită și care sînt analoge teoremelor demonstrate la șiruri uniform convergente.

T e o r e m a 1. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un șir de funcții definite pe o mulțime X și f o funcție definită pe X. Dacă

1) seria de funcții

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

este uniform convergentă către funcția f pe mulțimea X și dacă

2) toate funcțiile f_n sînt continue pe X, atunci funcția sumă f este continuă pe X.

Demonstraţie. Deoarece toate funcţiile f_n sînt continue pe X, sumele parţiale

$$S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

sînt funcţii continue pe X. Şirul sumelor parţiale (S_n) fiind uniform convergent pe mulţimea X către f, conform teoremei 1 de la şiruri uniform convergente, limita f este continuă pe X.

T e o r e m a 2. **Fie $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ un şir de funcţii definite şi derivabile pe mulţimea X. Dacă**

1) seria de funcţii

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

este uniform convergentă către funcţia f pe mulţimea X şi dacă

2) seria de funcţii

$$f_1' + f_2' + \ldots f_n' + \ldots$$

este uniform convergentă către funcţia g pe mulţimea X, atunci funcţia f este derivabilă pe mulţimea X şi derivata ei este g.

Demonstraţie. Şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_1^\infty f_n$ este uniform convergent pe mulţimea X către funcţia f. Şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_1^\infty f_n'$ este uniform convergent pe mulţimea X către funcţia g. Conform teoremei 2 de la şiruri de funcţii uniform convergente, funcţia f este derivabilă pe mulţimea X şi derivata ei este g.

Exemplu

$$\text{Seria } \frac{\cos x}{1^3} + \frac{\cos 2x}{2^3} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^3} + \ldots$$

cu funcţiile $\frac{\cos nx}{n^3}$, $n \in N$, definite pe $[0, 2\pi]$, este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$, funcţia sumă este derivabilă pe $[0, 2\pi]$ şi este egală cu suma derivatelor termenilor seriei.

Seria dată este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$, deoarece

$$\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Seria formată cu derivatele termenilor

$$-\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 2x}{2^2} - \ldots - \frac{\sin nx}{n^2} - \ldots$$

este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$, întrucît

$$\left|-\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Dacă notăm cu $f(x)$ suma seriei 1, atunci

$$f'(x) = -\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n^2}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

§ 3. SERIA TAYLOR

1. Seria Taylor. Seria Mac-Laurin

Fie f o funcție definită pe un interval I, indefinit derivabilă în punctul $a \in I$. Formula lui Taylor pentru funcția f în punctul a este

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \quad x \in I.$$

Dacă șirul $(R_n(x))$ pentru $x \in X \subset I$ este convergent către zero, adică

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \qquad x \in X \subset I,$$

atunci seria

$$f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots, \tag{1}$$

numită *seria Taylor a funcției f în punctul a*, este convergentă pentru $x \in X \subset I$ către $f(x)$, deci

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots \tag{2}$$

Formula obținută (2) se numește **formula de dezvoltare a funcției f în serie Taylor în jurul punctului a.**

Se observă că seria (1) este convergentă pentru $x = a$. Ne interesează în primul rînd să existe puncte $x \neq a$ pentru care seria (1) să fie convergentă. O condiție suficientă pentru existența unei mulțimi de convergență care să conțină și alte puncte în afară de punctul a este dată de următoarea

Teoremă. Seria Taylor a funcției f în jurul punctului a este convergentă într-o vecinătate V a lui a dacă derivatele de orice ordin $f^{(n)}$ sînt egal mărginite în V, adică

$$|f^{(n)}(x)| < M, \qquad M > 0,$$

pentru orice $x \in V$ și orice număr natural n.

Demonstrație. Restul R_n sub forma lui Lagrange este

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi), \qquad \xi \in (a, x) \subset V,$$

deci

$$|R_n(x)| < \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| M,$$

însă $|R_n(x)| \to 0$ cînd $n \to \infty$, deoarece seria cu termenul general

$$u_n = \left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot M$$

este convergentă pentru orice $x \in R$. Într-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x-a}{n+1}\right| = 0.$$

Teorema este demonstrată.

Dacă în (2) înlocuim pe a cu 0 şi f este indefinit derivabil în punctul $0 \in I$, obţinem

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots,$$

numită *formula lui Mac-Laurin.*

2. Exemple de dezvoltări în serie Mac-Laurin

a) **Funcţia** $f(x) = e^x$, $x \in R$ este indefinit derivabilă pe R

$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad x \in R,$$

şi pentru orice $x \in (-\alpha, +\alpha)$, $e^{-\alpha} \leqslant e^x \leqslant e^{\alpha}$, deci condiţia suficientă este îndeplinită. Deoarece $f^{(n)}(0) = 1$, avem

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

formulă valabilă pentru orice $x \in R$. Dacă înlocuim pe x cu $-x$ avem şi

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

b) **Funcţia** $f(x) = \text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ definită pe R are următoarea dezvoltare în serie Mac-Laurin:

$$\text{sh}\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

convergentă pentru orice $x \in R$, şi se obţine folosind dezvoltările în serie ale lui e^x şi e^{-x} scrise mai sus.

c) **Funcţia** $f(x) = \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ definită pe R are dezvoltarea în serie

$$\text{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

convergentă pentru orice $x \in R$, şi se obţine în acelaşi mod.

d) **Funcția** $f(x) = \sin x$ definită pe R este indefinit derivabilă pe R și $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. Condiția suficientă este îndeplinită deoarece $\left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$ pentru orice $x \in R$. Avem

$$f^{(4m)}(0) = 0; \quad f^{(4m+1)}(0) = 1, \quad f^{(4m+2)}(0) = 0;$$
$$f^{(4m+3)}(0) = -1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

deci pentru orice $x \in R$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

e) **Funcția** $f(x) = \cos x$ definită pe R este indefinit derivabilă pe R și $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. Condiția suficientă este îndeplinită, deoarece $\left|\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$ pentru orice $x \in R$. Avem

$$f^{(4m)}(0) = 1, \quad f^{(4m+1)}(0) = 0, \quad f^{(4m+2)}(0) = -1, \quad f^{(4m+3)}(0) = 0,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots,$$

deci pentru orice $x \in R$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

3. Formulele lui Euler

Să considerăm numărul complex

$$\cos x + i \sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$

definit pentru orice $x \in R$, și să observăm că

$$e^{\alpha x} = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n x^n}{n!} + \ldots \tag{1}$$

pentru $\alpha = i$ și $x \in R$ este numărul $\cos x + i \sin x$. Putem scrie deci

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$
$$\cos x - i \sin x = e^{-ix}, \tag{2}$$

de unde obținem imediat formulele

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

numite *formulele lui Euler*. Justificarea riguroasă a formulei (1) cu $\alpha = i$ se va da la teoria funcţiilor de o variabilă complexă. Am văzut (*A*., cap. I, § 4, al. 3) că un număr complex $a + ib$ sub forma trigonometrică se scrie

$$a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Dacă ţinem seama de formula (2), urmează că un număr complex $a + ib$ de modul $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ şi argument θ are şi următoarea formă

$$a + ib = re^{i\theta},$$

numită şi *forma exponenţială* a numărului complex.

4. Seria binomului generalizat $(1 + x)^\lambda$

Să aplicăm formula lui Mac-Laurin funcţiei $f(x) = (1 + x)^\lambda$, $x \in R$, unde λ este un număr real oarecare. Avem

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x),$$

cu

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Avem însă

$$f^{(k)}(x) = \lambda\,(\lambda - 1)\ldots(\lambda - k + 1)\,(1 + x)^{\lambda - k},$$

deci

$$f^{(k)}(0) = \lambda\,(\lambda - 1)\ldots(\lambda - k + 1),$$

astfel încît putem scrie

$$f(x) = 1 + \frac{\lambda}{1!} x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} x^n + R_n(x),$$

cu

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n+1-p}}{p \cdot n!} \lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n)\,x^{n+1}(1 + \theta x)^{\lambda - n - 1}.$$

Ne propunem să determinăm condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească x şi λ pentru ca şirul $(R_n(x))$ să fie convergent către zero.

Luăm $p = 1$ şi punem

$$R_n(x) = u_n \cdot (1 - \theta)^n \cdot (1 + \theta x)^{\lambda - n - 1},$$

unde

$$u_n = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)}{n!} x^{n+1}.$$

Seria cu termenul general u_n este absolut convergentă pentru $|x| < 1$. Într-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda - n - 1}{n+1}\right|\cdot|x| = |x| < 1.$$

Prin urmare, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. În $R_n(x)$ mai intervine factorul

$$v_n = (1-\theta)^n (1+\theta x)^{\lambda-n-1} = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\lambda-1},$$

însă pentru $|x| < 1$, $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1$, deci $|v_n| \to 0$ cînd $n\to\infty$,

încît

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \text{pentru orice } \lambda\in R, \quad \text{dacă } |x| < 1.$$

Prin urmare, pentru $|x| < 1$ şi $\lambda \in R$, avem următoarea dezvoltare în serie Mac-Laurin

$$(1+x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Observaţii

1) Seria numerică

$$1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} + \ldots$$

este absolut convergentă dacă $\lambda > 0$.

Dacă aplicăm criteriul lui Raabe şi Duhamel seriei modulelor, avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{n+1}{\lambda-n}\right| - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1-n+\lambda}{n-\lambda}\right) = \lambda + 1,$$

deci dacă $\lambda > 0$ seria este absolut convergentă. Rezultă de aici că seria binomului generalizat este convergentă pentru $x = \pm 1$ dacă $\lambda > 0$.

2) Seria numerică

$$1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} + \ldots$$

este convergentă pentru $\lambda > -1$.

Seria este alternată, deci este suficient să arătăm că şirul termenilor seriei este convergent către zero.

Putem scrie termenul general astfel

$$v_n = (-1)^n\left(1 - \frac{\lambda+1}{1}\right)\left(1 - \frac{\lambda+1}{2}\right)\ldots\left(1 - \frac{\lambda+1}{n}\right),$$

însă $\lambda + 1 > 0$, deci

$$1 - \frac{\lambda+1}{k} < e^{-\frac{\lambda+1}{k}}.$$

Prin urmare,

$$|v_n| < e^{-(\lambda+1)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} \to 0 \text{ cînd } n\to\infty, \text{ deci } v_n \to 0 \text{ cînd } n \to \infty.$$

O consecinţă a acestui fapt este că seria binomului generalizat este convergentă pentru $x = +1$ dacă $\lambda > -1$.

Acestea sînt toate cazurile în care *seria binomului generalizat este convergentă.*

Exemple

1) $\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$ pentru $|x| < 1$.

2) $\dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ pentru $|x| < 1$.

3) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n + \ldots$$

pentru $|x| < 1$. Seria este convergentă şi pentru $x = 1$.

4) $$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3\cdot 1!}x - \frac{2}{3^2\cdot 2!}\cdot x^2 + \frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}\cdot x^3 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}x^n + \ldots$$

pentru $|x| < 1$. Seria este convergentă şi pentru $x = \pm 1$.

5) Să se calculeze $\sqrt[3]{1\,001}$ cu 5 zecimale exacte. Avem

$$\sqrt[3]{1\,001} = 10\sqrt[3]{1+\frac{1}{10^3}} = 10\left[1 + \frac{1}{3\cdot 1!}\cdot\frac{1}{10^3} - \frac{2}{3^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{10^6} + \ldots\right].$$

Seria fiind alternată, este suficient să ne oprim la primii doi termeni

$$\sqrt[3]{1\,001} \simeq 10 + 0{,}00333 = 10{,}00333.$$

§ 4. SERII DE PUTERI

1. Definiţie. Mulţimea de convergenţă

Se numeşte serie de puteri o serie de funcţii $\sum\limits_0^\infty f_n$ în care $f_n(x) = a_n x^n$ sau $f_n(x) = a_n(x-a)^n$, $x \in R$. O serie de puteri are deci forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

sau

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \quad (2)$$

unde $a, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sînt numere. Deoarece prin înlocuirea lui $x - a$ cu y seria (2) are aceeași formă cu seria (1), vom considera serii de puteri numai sub forma (1). Seria lui Taylor sau seria lui Mac-Laurin, întîlnite, sînt serii de puteri.

Mulțimea de convergență a unei serii de puteri conține cel puțin un punct, și anume punctul $x = 0$, deoarece pentru $x = 0$ seria (1) este convergentă și are suma a_0.

Există serii de puteri care au mulțimea de convergență formată dintr-un singur punct $x = 0$, după cum există serii convergente pentru orice $x \in R$.

Exemple

1) Seria de puteri

$$1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + \ldots + n!\,x^n + \ldots$$

este convergentă numai în punctul $x = 0$. Într-adevăr, pentru orice $x_0 \neq 0$ există un rang n pentru care $|nx_0| > 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} |n!\,x_0^n| = +\infty$.

2) Seria de puteri

$$1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

este convergentă pentru orice $x \in R$. Într-adevăr, pentru orice $x_0 \in R$ avem $\left|\frac{u_{n-1}}{u_n}\right| = \frac{|x_0|}{n+1} \to 0$ cînd $n \to \infty$.

În legătură cu mulțimea de convergență a unei serii de puteri, avem următoarea teoremă fundamentală.

Teorema lui Abel. Pentru orice serie de puteri

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

există un număr $R \geq 0$ finit sau infinit astfel încît:

1) **seria este absolut convergentă pe intervalul deschis $(-R, R)$;**

2) **pentru orice x astfel încît $|x| > R$ seria este divergentă.**

Demonstrație. *a*) Dacă seria de puteri este convergentă numai în punctul $x = 0$, luăm $R = 0$, și teorema lui Abel este demonstrată.

b) Să presupunem că mulțimea de convergență conține puncte diferite de zero și fie $x_0 \neq 0$ un punct în care seria este convergentă, adică seria numerică

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

este convergentă. Deoarece $a_n x_0^n \to 0$ cînd $n \to \infty$, există un număr $M > 0$ astfel încît să avem

$$|a_n x_0^n| < M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dacă x este un punct astfel încît $|x| < |x_0|$, atunci

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Însă $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$; urmează că $|a_n x^n|$ este majorat de termenul general al unei serii geometrice $\sum_0^\infty M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ convergente şi, conform primului criteriu al comparaţiei, seria de puteri este absolut convergentă în punctul x pentru care $|x| < |x_0|$, deci pentru orice x situat în intervalul $(-x_0, +x_0)$.

Dacă x_1 este un punct de divergenţă al seriei, atunci pentru orice x pentru care $|x| > |x_1|$ seria este divergentă. Într-adevăr dacă ar exista un punct x_2 cu $|x_2| > |x_1|$ pentru care seria este convergentă, deoarece $|x_1| < |x_2|$, ar urma, conform celor demonstrate mai sus, că seria este convergentă în punctul x_1 ceea ce este imposibil. Să notăm cu A mulţimea de convergenţă a seriei date şi cu R marginea superioară a acestei mulţimi. Deoarece $0 \in A$, urmează că $R > 0$. Fie $x \in (-R, +R)$, $|x| < R$ şi un punct $x_0 > 0$ astfel încît $|x| < x_0 < R$. Punctul x_0 este punct de convergenţă a seriei; deoarece $|x| < x_0$ urmează că seria este absolut convergentă în punctul x, conform celor demonstrate mai sus; prin urmare, pentru orice x astfel încît $|x| < R$ seria este absolut convergentă.

Să arătăm acum că pentru orice x astfel încît $|x| > R$ seria este divergentă. Dacă $R = +\infty$, neegalitatea $|x| > R$ nu are sens. Rămîne să considerăm numai cazul $R < \infty$. Dacă $|x| > R$, există un punct x_1 astfel încît $R < x_1 < |x|$. Dacă x ar fi punct de convergenţă, atunci şi x_1 ar fi punct de convergenţă şi $x_1 \in A$; însă $x_1 > R$ şi R este marginea superioară a mulţimii A. Relaţiile

$$x_1 \in A, \quad x_1 > R, \quad R = \sup A$$

sînt contradictorii, deci seria nu este convergentă în punctul x; am arătat deci că pentru orice x astfel încît $x > R$ seria este divergentă. Teorema e demonstrată. Numărul R se numeşte *raza de convergenţă* a seriei de puteri, iar intervalul $(-R, +R)$ se numeşte *intervalul de convergenţă* al seriei de puteri.

Observaţie

Teorema lui Abel nu spune nimic în legătură cu convergenţa sau divergenţa seriei de puteri în punctele $-R$ şi R. În unul sau în amîndouă aceste puncte seria poate fi convergentă, divergentă sau oscilantă.

2. Determinarea razei de convergenţă

În intervalul de convergenţă seria de puteri

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

fiind absolut convergentă, raza de convergenţă se determină folosind criteriile de convergenţă de la seriile cu termeni pozitivi.

Teorema 1. Fie $\sum_0^\infty a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \qquad \text{(finită sau infinită),}$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } 0 < \lambda < +\infty \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty \\ +\infty, & \text{dacă } \lambda = 0 \end{cases}$$

Demonstrație. Fie x_0 un punct oarecare; dacă aplicăm criteriul raportului seriei numerice $\sum_0^\infty a_n x_0^n$ și dacă

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x_0}{a_n}\right|$$

există, urmează că seria este convergentă pentru $|x_0| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ și divergentă pentru $|x_0| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, de unde rezultă imediat teorema de mai sus.

Teorema 2. Fie $\sum_0^\infty a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lambda \quad \text{(finită sau infinită),}$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } 0<\lambda<+\infty \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0 \end{cases}$$

Demonstrație. Fie x_0 un punct oarecare; dacă aplicăm criteriul rădăcinii seriei numerice $\sum_0^\infty a_n x_0^n$ și dacă

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x_0^n|}$$

există, urmează că seria este convergentă pentru $|x_0| < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ și divergentă pentru $|x_0| > \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, de unde rezultă imediat teorema enunțată.

Exemple

1) Seria $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ are raza de convergenţă infinită. Într-adevăr, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$

2) Seria $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ are raza de convergenţă $R=1$. Într-adevăr, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$. În punctul $x=-1$ seria este oscilantă şi în punctul $x=1$ seria este divergentă.

3) Seria $1+1^a\cdot x+2^a\cdot x^2+\ldots+n^a\cdot x^n+\ldots$ este convergentă şi are raza de convergenţă $R=1$. Într-adevăr, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^a=1$. Dacă $a\geqslant 0$, în punctele $x=1$ şi $x=-1$ seria este divergentă. Dacă $-1\leqslant a<0$, în punctul $x=1$ seria este divergentă şi în punctul $x=-1$ seria este convergentă. Dacă $a<-1$, seria este convergentă în punctele $x=1$ şi $x=-1$.

3. Proprietăţile seriilor de puteri

Seriile de puteri sînt de o deosebită importanţă în cercetările teoretice şi în ştiinţele aplicate. Vom prezenta mai multe proprietăţi ale lor, în cele ce urmează.

a) *Convergenţa uniformă a seriilor de puteri* în intervalul de convergenţă.

T e o r e m ă. Fie $\sum_0^\infty a_n x^n$ o serie de puteri convergentă în intervalul $(-R,+R)$. Pentru orice număr r astfel încît $0<r<R$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.

Demonstraţie. Pentru că $r<R$ şi $r>0$, urmează, conform teoremei lui Abel, că seria $\sum_0^\infty a_n r^n$ este absolut convergentă, deci pentru $|x|\leqslant r$ seria $\sum_0^\infty a_n x^n$ este absolut convergentă. Deoarece $|a_n x^n|\leqslant|a_n|r^n$, conform criteriului de convergenţă uniformă a seriilor de funcţii (B., cap. V, § 2, al. 4), urmează că seria de puteri este uniform convergentă. Această teoremă are două consecinţe:

C o n s e c i n ţ a 1. Suma S a unei serii de puteri $\sum_0^\infty a_n x^n$ este o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă.

Demonstraţie. Pe orice interval $[-r, r]\subset(-R, R)$ seria de puteri este uniform convergentă şi toţi termenii seriei sînt funcţii continue, deci, conform unui rezultat obţinut [cap. V, § 3, al. 5], suma seriei S este o funcţie continuă pe $[-r, r]$.

Consecința 2. Suma S a unei serii de puteri $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform continuă pe orice interval compact I conținut în intervalul de convergență.

Demonstrație. Pe orice interval compact $I = [a, b] \subset (-R, R)$ suma S este continuă, deci, conform [B., cap. II, § 4, al. 7], este uniform continuă.

b) *Derivarea seriilor de puteri* în intervalul de convergență.

Teoremă. Fie $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri, convergentă în intervalul $(-R, R)$. Seria $\sum_{1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$, formată cu derivatele termenilor seriei date, are același interval de convergență ca și seria dată.

Demonstrație. Dacă notăm cu R' raza de convergență a seriei $\sum_{1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, avem

$$R' = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| = R.$$

Această teoremă are mai multe consecințe:

Consecința 1. Suma seriei formată cu derivatele termenilor de puteri este derivata sumei seriei de puteri, în intervalul de convergență. Dacă notăm

$$S(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{și} \quad \varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} na_n x^{n-1},$$

atunci

$$S'(x) = \varphi(x) \text{ pentru orice } x \in (-R, R).$$

Demonstrație. Seria derivatelor avînd aceeași rază de convergență ca și seria inițială, urmează că seria derivatelor este uniform convergentă în intervalul de convergență a seriei inițiale. Conform unui rezultat anterior [B., cap. V, § 2, al. 5], derivata sumei S este egală cu suma seriei derivatelor termenilor, deci $S' = \varphi$.

Consecința 2. Suma seriei formată cu derivatele termenilor unei serii de puteri este o funcție continuă și derivabilă pe intervalul de convergență.

Consecința 3. Dacă $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență R:

1) seria formată cu derivatele de ordinul n ale termenilor seriei are aceeași rază de convergență R;

2) suma S a seriei $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ este indefinit derivabilă pe intervalul de convergență $(-R, R)$ și derivata de ordinul n, $S^{(n)}(x)$ este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n pentru orice $x \in (-R, R)$.

Observaţie

Să găsim dezvoltarea în serie Mac-Laurin a unei funcţii f îndefinit derivabilă, definită într-un interval $(-R, R)$ de o serie de puteri

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Avem

$$f^{(n)}(x) = n!\,a_n + \frac{(n+1)!}{1!} a_{n+1} x + \ldots, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

deci

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n! \quad \text{sau} \quad a_n = \frac{f^{n}(0)}{n!}, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

astfel încît obţinem

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$$

Prin urmare, seria de puteri este seria Mac-Laurin a funcţiei sumă $f(x)$, $x \in (-R, R)$.

Exemple

1) Seria $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ (1)

are raza de convergenţă $R = 1$. Seria cu derivatele termenilor

$$1 - x^2 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

are aceeaşi rază de convergenţă şi suma $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, deci suma seriei iniţiale este $C + \text{arc tg } x$. Pentru $x = 0$, $C = 0$, prin urmare (1) este dezvoltarea în serie a lui arc tg x, $|x| < 1$,

$$\text{arc tg } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Pentru $x = 1$, seria din partea a doua este convergentă, deci

$$\text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

Aceasta este prima serie care a condus la calculul lui π. Este însă slab convergentă.

2) Funcţia $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$ are următoarea dezvoltare în serie

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!} x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!} x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} + \ldots$$

Seria următoare

$$x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot 1!} x^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!} x^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!} x^{2n+1} + \ldots$$

are ca derivată seria lui $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Printr-un raționament analog cu cel de la exercițiul precedent, obținem dezvoltarea în serie a lui arc sin x

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot 1!}x^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^5 + \ldots, \qquad |x| < 1.$$

Pentru $x = \frac{1}{2}$, arc sin $x = \frac{\pi}{6}$, deci

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2!}\cdot\frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{3n}\cdot n!} + \ldots,$$

serie care permite calculul lui π, deoarece este repede convergentă.

3) Seria $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$ (1)

are raza de convergență $R = 1$. Seria cu derivatele termenilor

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

are aceeași rază de convergență cu seria (1) și suma $\frac{1}{1+x}$ pentru $|x| < 1$. Rezultă de aici că seria inițială are ca sumă $\ln(1+x) + C$; pentru $x = 0$, $C = 0$; prin urmare,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \; |x| < 1.$$

Același rezultat îl obținem dacă dezvoltăm direct în serie Mac-Laurin pe $\ln(1+x)$. Pentru $x = 1$, seria este convergentă, deci

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

În mod asemănător avem și

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots, \qquad |x| < 1.$$

4. Operații cu serii de puteri

Fie $\sum_0^\infty a_n x^n$ și $\sum_0^\infty b_n x^n$ două serii de puteri de raze de convergență R_1 și R_2, respectiv.

a) *Suma celor două serii* este tot o serie de puteri

$$\sum_0^\infty (a_n + b_n)x^n,$$

care are ca rază de convergență $R \geqslant \min(R_1, R_2)$.

Într-adevăr, pentru orice x_0, astfel încît $|x_0| < R_1$, $|x_0| < R_2$, seriile numerice $\sum_0^\infty a_n x_0^n$ şi $\sum_0^\infty b_n x_0^n$ sînt convergente, deci şi suma lor este convergentă.

Dacă $A(x)$ şi $B(x)$ sînt sumele celor două serii şi $S(x)$ este suma seriei $\sum_0^\infty (a_n + b_n) x^n$, avem

$$S(x) = A(x) + B(x) \quad \text{pentru orice } |x| < R.$$

În mod asemănător se arată că

b) *Diferenţa celor două serii* este tot o serie de puteri

$$\sum_0^\infty (a_n - b_n) x^n,$$

care are ca rază de convergenţă $R \geqslant \min (R_1, R_2)$.

Dacă $D(x)$ este suma seriei $\sum_0^\infty (a_n - b_n) x^n$, avem

$$D(x) = A(x) - B(x) \quad \text{pentru orice } |x| < R.$$

c) *Produsul celor două serii* de puteri este o serie de puteri

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) x + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) x^n + \ldots,$$

care are ca rază de convergenţă $R \geqslant \min (R_1, R_2)$.

Dacă $T(x)$ este suma seriei produs, avem

$$T(x) = A(x) \cdot B(x) \quad \text{pentru orice } |x| < R.$$

d) *Cîtul a două serii de puteri* $A(x)$, $B(x)$, $b_0 \neq 0$ este o serie de puteri $C(x)$

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

cu coeficienţi $c_0, c_1, \ldots$ definiţi de egalitatea

$$A(x) = B(x) \cdot C(x).$$

Coeficienţii $c_0, c_1, \ldots$ se determină din sistemul infinit de ecuaţii liniare

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0c_0 \\
a_1 &= b_0c_1 + b_1c_0 \\
a_2 &= b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= b_0c_n + b_1c_{n-1} + \ldots + b_{n-1}c_1 + b_nc_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Exemple

1) Să facem suma seriilor

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \qquad |x| < 1,$$

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots, \qquad |x| < 1;$$

avem

$$\ln(1+x) + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} - \ldots - \frac{x^{2n}}{n} - \ldots, \qquad |x| < 1,$$

care este tocmai dezvoltarea în serie a lui $\ln(1-x^2)$ pentru $|x| < 1$.

2) Dezvoltarea în serie a lui $\operatorname{tg} x$ o putem obține împărțind seriile lui $\sin x$ și $\cos x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots,$$

valabilă pentru $|x| < \frac{\pi}{2}$.

5. Aplicație. Calculul numeric al logaritmilor naturali

Să presupunem că $\ln N$ este cunoscut și ne propunem să găsim pe $\ln(N+1)$. Trebuie să calculăm diferența

$$\ln(N+1) - \ln N = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

Folosind dezvoltarea în serie obținută la acest paragraf, al. 3, pentru $N > 1$, avem

$$\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{N^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{N^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{N^4} + \ldots,$$

însă seria din partea a doua este slab convergentă, mai ales dacă N este mic. Să considerăm însă dezvoltările în serie

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \qquad |x| < 1,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots, \qquad |x| < 1;$$

avem

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right), \qquad |x| < 1,$$

şi dacă punem $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{N}$, deci $x = \frac{1}{2N+1}$, obţinem dezvoltarea

$$\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5} + \ldots,$$

convergentă pentru $N > 0$. Seria obţinută se numeşte seria lui Mercator şi serveşte pentru calculul logaritmilor naturali.

Exemplu

Pentru $N = 1$, avem

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}} + \ldots$$

Ne propunem să calculăm pe ln 2 cu 10 zecimale exacte.

Conform unui rezultat cunoscut [B., cap. I, § 8, al. 2], eroarea pe care o facem însumînd primii n termeni este inferioară lui $\frac{k}{1-k}u_n$, unde $1 > k \geqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$. În cazul nostru,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}\cdot 3^{2n-1}\cdot(2n-1) < \frac{1}{9} = k$$

şi

$$\frac{k}{1-k}u_n = \frac{u_n}{8} < \frac{1}{10^{10}}, \quad \text{deci } u_n < \frac{8}{10^{10}}, \text{ care ne dă } n = 10.$$

Trebuie să calculăm termenii cu 12 zecimale exacte, deoarece eroarea făcută la zece termeni, datorită ultimei zecimale, este $\frac{10}{10^{12}} = \frac{1}{10^{11}}$ şi

$$\frac{u_{10}}{8} = \frac{1}{21}\cdot\frac{1}{3^{19}}\cdot\frac{1}{8} < \frac{6}{10^{12}},$$

astfel încît eroarea totală R_{10} este dată de

$$R_{10} < 2\cdot\frac{6}{10^{12}} + 2\cdot\frac{10}{10^{12}} = \frac{32}{10^{12}}.$$

Avem

$$\frac{1}{3} \simeq 0{,}333\ 333\ 333\ 333$$

$$\frac{1}{3\cdot 3^2} \simeq 0{,}012\ 345\ 679\ 012$$

$$\frac{1}{5\cdot 3^5} \simeq 0{,}000\ 823\ 045\ 267$$

$$\frac{1}{7\cdot 3^7} \simeq 0{,}000\ 065\ 321\ 052$$

$$\frac{1}{9\cdot 3^9} \simeq 0{,}000\ 005\ 645\ 029$$

$$\frac{1}{11\cdot 3^{11}} \simeq 0{,}000\ 000\ 513\ 184$$

$$\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}} \simeq 0{,}000\ 000\ 048\ 248$$

$$\frac{1}{15\cdot 3^{15}} \simeq 0{,}000\ 000\ 004\ 646$$

$$\frac{1}{17\cdot 3^{17}} \simeq 0{,}000\ 000\ 000\ 455$$

$$\frac{1}{19\cdot 3^{19}} \simeq 0{,}000\ 000\ 000\ 045.$$

Am obținut pe ln 2 cu 10 zecimale exacte:

$$\ln 2 \simeq 0{,}693\ 147\ 1805.$$

eroarea fiind mai mică decît $\frac{32}{10^{12}} \simeq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^{10}}$.

Capitolul VI

FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

§ 1. SPAȚIUL CU n DIMENSIUNI

1. Definiție. Structura de spațiu vectorial

Mulțimea R^n formată cu toate grupele ordonate de n numere reale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numește *spațiul cu n dimensiuni*. Un element sau *un punct* al său se notează

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Numerele $x_1, \ldots, x_n$ se numesc *coordonatele* sau proiecțiile punctului x. Dacă considerăm n drepte egale cu dreapta reală R, atunci spațiul cu n dimensiuni este produsul cartezian $R \times R \times \ldots \times R$, deci

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ factori}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in R, x_2 \in R, \ldots, x_n \in R\}.$$

Cu punctele spațiului R^n se pot face următoarele operații:

a) **Adunarea.** Fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ două puncte din R^n.

Suma $a + b$ este definită de

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

și reprezintă tot un punct din R^n, care are ca proiecții suma proiecțiilor celor două puncte.

Adunarea are următoarele proprietăți:

1) este comutativă

$$a + b = b + a;$$

2) este asociativă

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

3) există elementul neutru, punctul $0(0, 0, \ldots, 0)$, numit *originea* spaţiului R^n, care are toate coordonatele nule, astfel încît

$$a + 0 = a;$$

4) pentru orice punct $a \in R^n$ există opusul său $-a \in R^n$, definit de $-a = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$, astfel încît

$$a + (-a) = 0.$$

Am arătat astfel că *mulţimea R^n formează un grup comutativ faţă de operaţia de adunare.*

b) **Înmulţirea cu scalari.** Se numeşte scalar orice număr real λ. Pentru orice număr $\lambda \in R$ şi orice punct $a \in R^n$ produsul $\lambda a = a\lambda$, numit *produsul cu scalari* sau *produsul cu numere*, se defineşte astfel:

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$$

şi are următoarele proprietăţi:

1) este distributiv

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \qquad a, b \in R^n, \quad \lambda \in R;$$

$$(\mu + \lambda) a = \mu a + \lambda a, \qquad a \in R^n, \ \lambda, \mu \in R;$$

2) este asociativ

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a;$$

3) există element neutru numărul 1

$$1 . a = a.$$

Definiţie. O mulţime A pe care s-au definit o operaţie de adunare $(a, b) \to a + b$ şi o operaţie de înmulţire cu numere $(\lambda, a) \to \lambda a$ care au proprietăţile enumerate mai sus se numeşte spaţiu vectorial, iar elementele sale se numesc vectori.

Conform acestei definiţii, *mulţimea R^n formează un spaţiu vectorial.* Punctele sale $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se numesc *vectori*, iar componentele $a_1, \ldots, a_n$, proiecţiile vectorului a pe axele de coordonate şi se notează

$$a_1 = pr_1 a, \quad a_2 = pr_2 a, \ \ldots, \ a_n = pr_n a.$$

Exemple

1) Mulţimea perechilor ordonate de numere reale (x, y) formează mulţimea *punctelor din plan* sau *spaţiul cu două dimensiuni R^2*.

2) Mulţimea grupelor ordonate de trei numere reale (x, y, z) formează *mulţimea punctelor din spaţiu* sau *spaţiul cu trei dimensiuni R^3*.

c) **Bază în spațiul R^n.** Fie vectorii $e_1 = (1,00, \ldots, 0)$, $e_2 = (0,1,0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0,0, \ldots, 0,1)$. Orice vector $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se scrie ca o combinație liniară a vectorilor $e_1, e_2, \ldots, e_n$, coeficienții combinației fiind componentele vectorului a. Într-adevăr

$$a_1 e_1 = (a_1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$
$$a_2 e_2 = (0, a_2, 0, \ldots, 0, 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, a_n),$$

de unde urmează că

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a.$$

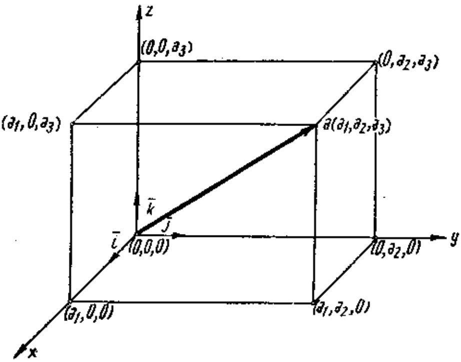


Fig. 101

Se spune că vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formează o bază în R^n.

În spațiul cu trei dimensiuni, vectorii e_1, e_2, e_3 se notează $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, astfel încît un vector (a_1, a_2, a_3) din spațiu se scrie $a_1 i + a_2 j + a_3 \bar{k}$; i, j, k se numesc *versorii* axelor de coordonate Ox, Oy, Oz (fig. 101).

2. Produsul scalar a doi vectori

a) **Definiție.** Fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ și $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ doi vectori din R^n.

Produsul scalar al vectorilor a, b este numărul

$$(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Din definiție rezultă proprietățile:

1) $(a, a) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant 0$, $(a, a) = 0$, dacă și numai dacă $a = 0$;
2) $(a, b) = (b, a)$, comutativ;
3) $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$, distributiv;
   $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$, distributiv;
4) $\lambda(a, b) = (\lambda a, b) = (a, \lambda b)$, omogen.

Exemple

1) Vectorii bazei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ verifică următoarele relații $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} simbolul lui Kronecker).

Într-adevăr, $(e_i, e_i) = 1$ și $(e_i, e_j) = 0$ dacă $i \neq j$. Se spune că vectorii bazei sînt ortonormali.

2) *Inegalitatea lui Schwarz-Buniakovski.* Dacă $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ și $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, avem $(a, b)^2 \leqslant (a, a) \cdot (b, b)$.

Expresia $E = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - xb_i)^2$ este pozitivă pentru orice x; dezvoltînd-o avem $E = (a, a) - 2(a, b)x + (b, b)x^2$. Discriminantul $(a, b)^2 - (a, a) \cdot (b, b)$ este negativ.

b) **Definiție. Fie vectorul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ din spațiul R^n. Se numește norma vectorului a numărul pozitiv**

$$\| a \| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2};$$

are următoarele proprietăți:

1) $\| a \| \geqslant 0$, $\| a \| = 0$, dacă și numai dacă $a = 0$;
2) $\| \lambda a \| = |\lambda| \cdot \| a \|$;
3) $\| a + b \| \leqslant \| a \| + \| b \|$;
4) $|a_i| \leqslant \| a \| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$.

Primele două proprietăți rezultă imediat din definiția normei.

Pentru 3 avem

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

însă avem neegalitatea (Schwarz-Buniakovski)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

deci

$$\sum (a_i + b_i)^2 \leqslant \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{\sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2}$$

sau

$$\sqrt{\sum (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}.$$

Un spațiu vectorial pe care s-a definit o normă cu proprietățile 1, 2, 3 se numește ***spațiu vectorial normat.***

c) **Definiție.** **Distanța dintre două puncte a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ și b $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ din R^n este numărul**

$$d(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} = \| a - b \|;$$

are următoarele proprietăți, care se deduc imediat din proprietățile normei:

1) $d(a, b) \geqslant 0$; $d(a, b) = 0$, dacă și numai dacă $a = b$, adică $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$;

2) $d(a, b) = d(b, a)$;

3) $d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b)$.

Exemple

1) În spațiul cu două dimensiuni, $d(a, b)$ este distanța dintre două puncte din plan: $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$.

2) În spațiul cu trei dimensiuni, $d(a, b)$ este distanța dintre două puncte din spațiu: $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.

§ 2. MULȚIMI DE PUNCTE ÎN SPAȚIUL CU n DIMENSIUNI

1. Intervale. Sfera

Definiție. **Fie $I_1, I_2, \ldots, I_n$ n intervale deschise pe o dreaptă. Se numește interval n dimensional I produsul cartezian $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, deci**

$$I = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) | \, x_1 \in I_1, \; x_2 \in I_2, \ldots, \; x_n \in I_n \}.$$

Intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ pot fi mărginite sau nemărginite.

Exemple

1) În plan, un interval bidimensional $I_1 \times I_2$, unde

$$I_1 = \{ x \,|\, a < x < b, \qquad I_2 = \{ y \,|\, c < y < d \},$$

este un dreptunghi.

2) În spațiu, un interval tridimensional $I = I_1 \times I_2 \times I_3$, cu

$$I_1 = \{ x \,|\, a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \qquad I_2 = \{ y \,|\, b_1 \leqslant y \leqslant b_2 \}, \qquad I_3 = \{ z \,|\, c_1 \leqslant z \leqslant c_2 \},$$

este un paralelipiped. Intervalul este închis, deoarece mulțimea I conține atît punctele interioare cît și punctele de pe fețele paralelipipedului.

Definiție. **Se numește sferă cu centru în a și rază r mulțimea**

$$V_r(a) = \{ x \,|\, x \in R^n, \;\; \| x - a \| < r \},$$

formată din toate punctele x a căror distanță la punctul a este $< r$.

Dacă $\| x - a \| \leqslant r$, sfera se numește închisă.

Mulțimea punctelor unei sfere închise cu centrul în punctul a și rază r este definită deci de neegalitatea $(x_1 - a)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \leqslant r^2$.

Exemple

1) În spațiu, o sferă închisă $V_r(a)$ este definită de

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqslant r^2$$

și reprezintă mulțimea punctelor din interiorul și de pe sfera cu centrul în punctul (a, b, c) și raza r.

2) În plan, o sferă închisă $V_r(a)$ este definită de

$$(x - a)^2 + (y - b^2) \leqslant r^2$$

și reprezintă punctele din interiorul și de pe cercul cu centrul în punctul (a, b) și raza r.

Observație

Orice sferă de rază r conține un interval n dimensional și este conținută într-un interval n dimensional.

Fie

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n, \text{ unde } I_k = \left(a_k - \frac{r}{\sqrt{n}}, a_k + \frac{r}{\sqrt{n}}\right),$$

și

$$I' = I_1' \times I_2' \times \ldots \times I_n', \text{ unde } I_k' = (a_k - r,\ a_k + r).$$

Avem

$$I \subset V_{r(a)} \subset I'.$$

2. Vecinătăți

Definiție. Se numește vecinătate a unui punct a din spațiul cu n dimensiuni orice mulțime care conține o sferă deschisă $V_r(a)$ cu centrul în a.

În virtutea observației precedente, avem următoarea definiție echivalentă.

Definiție. Se numește vecinătate a unui punct $a \in R^n$ orice mulțime V care conține un interval n dimensional I care conține punctul a, deci $a \in I \subset V$.

Exemplu

Neegalitățile

$$|x_1 - a_1| < \varepsilon,\ |x_2 - a_2| < \varepsilon, \ldots, |x_n - a_n| < \varepsilon$$

definesc tot o vecinătate a punctului $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ și anume o vecinătate simetrică.

3. Mulțimi deschise. Mulțimi închise. Frontieră

Fie A o submulțime a spațiului R^n și $a \in R^n$. Se spune că a este un punct interior al mulțimii A dacă există o vecinătate V a punctului a conținută în A, deci

$$a \in V \subset A.$$

O mulțime formată numai din puncte interioare se numește *mulțime deschisă.*

Se spune că a este *un punct aderent* al mulțimii A dacă, oricare ar fi vecinătatea V a lui a, $V \cap A \neq \Phi$. Mulțimea punctelor aderente lui A se numește închiderea lui A și se notează $\overline{A}$. Orice punct $a \in A$ este punct aderent al lui A, deci $A \subset \overline{A}$.

Se spune că *o mulțime este închisă* dacă își conține toate punctele aderente, adică este egală cu închiderea sa: $A = \overline{A}$.

Un punct $a \in R^n$ se spune că este *punct frontieră* al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui a conține puncte atît ale lui A cît și ale complementarei CA; prin urmare, un punct frontieră este punct aderent atît pentru mulțimea A cît și pentru complementara CA. Mulțimea punctelor frontieră ale mulțimii A formează *frontiera lui* A și se notează FA.

Exemple

1) Mulțimea punctelor interioare unui cerc de rază r este o mulțime deschisă.

2) Mulțimea punctelor unei sfere închise este o mulțime închisă.

3) Fețele unui paralelipiped formează frontiera mulțimii formate cu punctele interioare paralelipipedului.

4. Mulțimi compacte

Fie A o submulțime a spațiului R^n și $a \in R^n$. Se spune că a este punct de acumulare al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui a conține cel puțin un punct $x \neq a$ din A; prin urmare, orice vecinătate V conține o infinitate de puncte ale mulțimii A.

Din definiție rezultă că un punct de acumulare al mulțimii A este punct aderent al mulțimii A. Prin urmare, o mulțime închisă își conține toate punctele de acumulare.

Se spune că o mulțime A este mărginită dacă există o sferă $V_r(0)$ cu centrul în origine, care conține mulțimea A; adică

$$\|x\| \leqslant r \text{ pentru orice } x \in A.$$

Mulțimile *închise* și *mărginite* din R^n se numesc *mulțimi compacte.*

Exemple

1) O sferă închisă este o mulțime compactă.

2) Un interval n dimensional $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ cu $I_k = \{x \mid x \in R,\ a_k \leqslant x_k \leqslant b_k\}$ este o mulțime compactă.

5. Mulţimi conexe. Domeniu

Definiţie. O mulţime $A \subset R^n$ se numeşte mulţime conexă dacă, oricum am descompune-o în două mulţimi A_1 şi A_2, disjuncte şi ambele diferite de $\varnothing$, cel puţin una din mulţimile A_1 sau A_2 are cel puţin un punct de acumulare în cealaltă.

Exemple

1) Un interval n dimensional este o mulţime conexă.
2) O sferă din R^n este o mulţime conexă.
3) Mulţimea punctelor cuprinse între două sfere concentrice este o mulţime conexă.
4) Mulţimea punctelor interioare a două cercuri care nu au nici un punct comun nu este o mulţime conexă.

O noţiune care va fi folosită des este aceea de *domeniu.*

Definiţie. O mulţime deschisă şi conexă se numeşte domeniu.

Exemple

1) Un interval deschis n dimensional este un domeniu.
2) O sferă deschisă din R^n este un domeniu.

Într-un domeniu D, oricare ar fi punctele $a, b \in D$, există o linie poligonală $L \subset D$, care uneşte punctele a şi b.

§ 3. ŞIRURI DE PUNCTE ÎN SPAŢIUL CU n DIMENSIUNI

1. Şiruri convergente

O mulţime de puncte din spaţiul $(a_p)_{p \in I}$ se numeşte *şir* dacă mulţimea indicilor I este mulţimea numerelor naturale $N = 1, 2, 3, \ldots$ şi se notează

$$(a_n)_{n \in N} \text{ sau } (a_n),$$

unde $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$.

Definiţie. Se spune că un şir de puncte din R^n

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots$$

este convergent către punctul $a \in R^n$ dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $p > N(\varepsilon)$ să avem

$$\| a_p - a \| < \varepsilon$$

şi se scrie

$$\lim_{p \to \infty} a_p = a.$$

Observaţie

Condiţia $\| a_p - a \| < \varepsilon$ pentru orice $p > N(\varepsilon)$ atrage condiţiile

$$| a_{p1} - a_1 | < \varepsilon, \; | a_{p2} - a_2 | < \varepsilon, \ldots, \; | a_{pn} - a_n | < \varepsilon$$

pentru orice $p > N(\varepsilon)$.

Se poate demonstra la fel ca pentru șirurile de numere, înlocuind modulul cu norma:

Criteriul general al lui Cauchy. Un șir (a_n) de puncte din R^n este convergent dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $p > N(\varepsilon)$, $q > N(\varepsilon)$, să avem

$$\| a_p - a_q \| < \varepsilon.$$

Din criteriul general al lui Cauchy rezultă imediat convergența șirurilor proiecțiilor (a_{pk}). Într-adevăr, neegalitatea

$$[(a_{p1} - a_{q1})^2 + (a_{p2} - a_{q2})^2 + \ldots + (a_{pn} - a_{qn})^2]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

pentru orice $p > N(\varepsilon)$, și $q > N(\varepsilon)$ atrage neegalitățile:

$$\begin{aligned} &| a_{p1} - a_{q1} | < \varepsilon, \text{ pentru orice } p > N(\varepsilon),\ q > N(\varepsilon);\\ &| a_{p2} - a_{q2} | < \varepsilon, \text{ pentru orice } p > N(\varepsilon),\ q > N(\varepsilon);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &| a_{pn} - a_{qn} | < \varepsilon, \text{ pentru orice } p > N(\varepsilon),\ q > N(\varepsilon);\end{aligned}$$

și reciproc, modificînd convenabil pe ε. Putem scrie deci implicația

$$(a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{p1} \to a_1 \\ a_{p2} \to a_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{pn} \to a_n \end{cases}$$

dacă $p \to \infty$, $p \in N$.

Exemplu

În plan, șirul de puncte (a_p, b_p) este convergent către (a_0, b_0) dacă șirul (a_p) este convergent către a_0 și șirul (b_p) este convergent către b_0, și reciproc, adică

$$(a_p, b_p) \to (a_0, b_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a_p \to a_0 \\ b_p \to b_0 \end{cases}$$

dacă $p \to \infty$, $p \in N$.

Întrucît, convergența șirurilor de puncte din R^n atrage convergența șirurilor proiecțiilor și reciproc, toate demonstrațiile privind mulțimi și șiruri din R^n se obțin transpunînd convenabil demonstrațiile din cazul mulțimilor sau șirurilor de numere. Teoremele următoare, demonstrate pentru mulțimi de puncte din R, se mențin și pentru mulțimi de puncte din R^n.

Teorema lui Weierstrass-Bolzano. Orice mulțime mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare.

Teorema lui Borel-Lebesgue. Din orice acoperire cu mulțimi deschise a unei mulțimi compacte $A \subset R^n$ se poate extrage o acoperire finită a mulțimii A.

Lema lui Cesàro. Orice șir mărginit de puncte din R^n conține un subșir convergent.

§ 4. FUNCȚII DEFINITE PE MULȚIMI DIN SPAȚIUL CU n DIMENSIUNI

1. Funcții reale de o variabilă vectorială

D e f i n i ț i e. Fie X o mulțime din R^n. O funcție $f : X \to R$ definită pe X cu valori reale (mulțimea valorilor $\subset R$) se numește o funcție reală de variabilă vectorială $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \subset R^n$ și se notează

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ sau } f(x).$$

Argumentul funcției este vectorul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; mulțimea de definiție este o mulțime din R^n.

Deoarece valorile funcției f depind de coordonatele lui x, adică de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o funcție reală de o variabilă vectorială se mai numește *funcție reală de n variabile reale*, ceea ce îndreptățește notația $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Graficul unei funcții reale de n variabile reale $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definită pe o mulțime X din spațiul R^n, este format din mulțimea punctelor $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ din spațiul R^{n+1} cînd $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \subset R^n$.

E x e m p l u

O funcție de două variabile $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset R^2$ are graficul o suprafață (S) în spațiu (fig. 102).

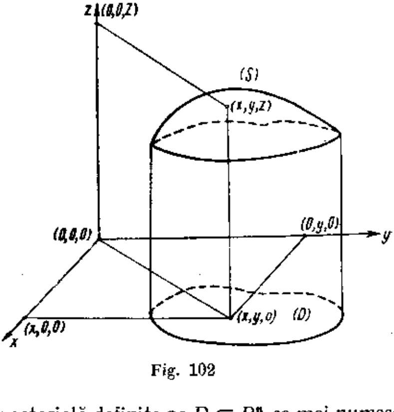


Fig. 102

Funcțiile reale de o variabilă vectorială definite pe $D \subset R^n$ se mai numesc *funcții scalare* pe D sau *cîmpuri scalare* pe D.

2. Funcții vectoriale de o variabilă vectorială

Fie m funcții reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ definite pe o aceeași mulțime $X \subset R^n$. Punctul $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ are drept coordonate valorile funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_m$ în punctul $x \in R^n$. Corespondența

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

definește o funcție $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ pe $X \subset R^n$ cu valori în R^m. Se spune că funcția f este o funcție vectorială de variabilă vectorială, deoarece atît argumentul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cît și valorile funcției

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

sînt vectori (x este vector în spațiul R^n și $f(x)$ vector în spațiul R^m).

Funcțiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de variabilele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc componentele funcției vectoriale f.

Observații

1) Dacă ne dăm m funcții reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de n variabile reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definite pe $X \subset R^n$, și dacă punem

$$f_1 = pr_1 f,\ f_2 = pr_2 f, \ldots, f_m = pr_m f,$$

atunci funcția

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

este o funcție vectorială pe R^n cu valori în R^m. Prin urmare, m funcții reale de n variabile reale definesc o funcție vectorială cu valori în R^m și reciproc.

Această observație reduce studiul unei funcții vectoriale de o variabilă vectorială la studiul unor funcții reale de variabile reale.

2) Dacă $m = 1$, funcția vectorială de variabilă vectorială se reduce la o funcție reală de n variabile reale, adică la un cîmp scalar definit pe mulțimi din R^n.

Exemple

1) Funcțiile $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ definite pe $I \subset R$ sînt componentele unei funcții vectoriale $\overline{F}(t)$

$$\overline{F}(t) = \overline{i} f_1(t) + \overline{j} f_2(t) + \overline{k} f_3(t)$$

de variabilă reală t. Graficul funcției $\overline{F}(t)$ este o curbă (C) în spațiu (fig. 103), iar ansamblul celor trei funcții $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ constituie o reprezentare parametrică a curbei C; argumentul t se numește parametru.

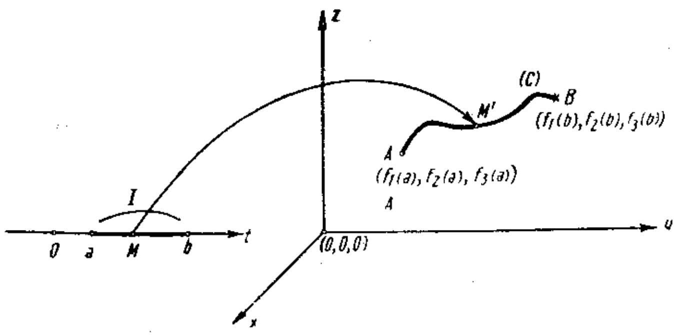


Fig. 103

2) Funcțiile $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$, $f_3(u, v)$ definite pe $I \subset R^2$ sînt componentele unei funcții vectoriale $\overline{\Phi}(u, v)$

$$\overline{\Phi}(u, v) = \overline{i} f_1(u, v) + \overline{j} f_2(u, v) + \overline{k} f_3(u, v)$$

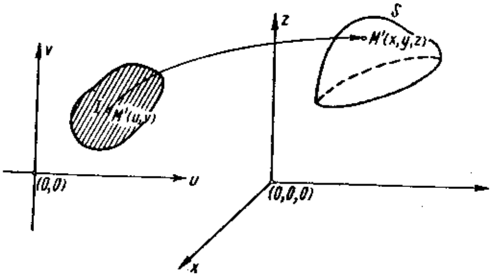


Fig. 104

cu valori în R^3. Graficul funcției $\overline{\Phi}$ este o suprafață (S) în spațiu (fig. 104), iar ansamblul celor trei funcții $x = f_1(u, v)$, $y = f_2(u, v)$ $z = f_3(u, v)$ constituie o reprezentare parametrică a suprafeței S.

3) Funcția vectorială $\overline{F}$ de variabilă vectorială $\overline{r} = \overline{i}\, x + \overline{j}\, y + \overline{k} z$, $\overline{r} \in I \subset R^3$ definește trei funcții reale X, Y, Z de trei variabile reale (x, y, z), componentele funcției $\overline{F}$:

$$\overline{F}(\overline{r}) = \overline{i}\, X(x, y, z) + \overline{j}\, Y(x, y, z) + \overline{k} Z(x, y, z).$$

Vectorul $\overline{r}$ se numește *vectorul de poziție* al punctului $M(x, y, z)$. Funcția $\overline{F}(\overline{r})$ definită pe I se spune că este un *cîmp vectorial* definit pe I.

Cînd punctul $M(x, y, z)$ descrie mulțimea I, punctul $M'(X, Y, Z)$ descrie mulțimea J din spațiul R^3 (fig. 105).

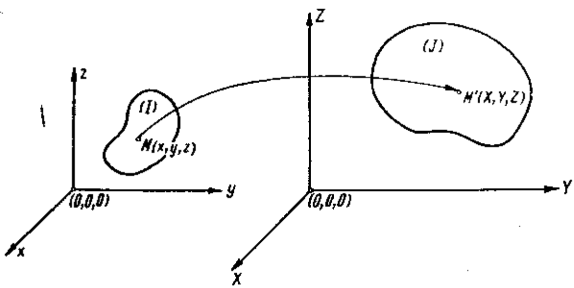


Fig. 105

O funcție vectorială $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ definită pe $X \subset R^n$ cu valori în R^m se spune că este mărginită pe X dacă există un număr $M > 0$ astfel încît

$$\|f(x)\| \leqslant M \text{ pentru orice } x \in X.$$

Definiția este echivalentă cu

$$|f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leqslant M', \text{ pentru orice } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$$

și $k = 1, 2, \dots, m$. Prin urmare, o funcție vectorială f este mărginită dacă funcțiile componente sînt mărginite și reciproc.

3. Operații cu funcții vectoriale

Fie f și g două funcții vectoriale definite pe aceeași mulțime $X \subset R^n$, cu valori în R^m.

a) Suma $f + g$ a celor două funcții este o funcție definită pe $X \subset R^n$ cu valori în R^m

$$f(x) + g(x), \ x \in X \subset R^n.$$

Dacă $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$, atunci

$$f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_m + g_m).$$

b) Produsul λf al funcției f cu numărul real λ este o funcție λf definită pe $X \subset R^n$, cu valori în R^m,

$$\lambda f(x), \ x \in X \subset R^n,$$

dată de

$$\lambda f = (\lambda f_1, \lambda f_2, \dots, \lambda f_m).$$

c) Produsul φf al funcției vectoriale f cu funcția reală φ definită pe $X \subset R^n$ este funcția

$$\varphi(x) f(x), \ x \in X \subset R^n,$$

cu valori în R^m și

$$\varphi f = (\varphi f_1, \varphi f_2, \dots, \varphi f_m).$$

d) Fie $f: X \to Y \subset R^m$, $g: Y \to R^p$, $X \in R^n$,

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m), \ g = (g_1, g_2, \dots, g_p),$$

cu

$$f_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \ g_i = g_i(y_1, y_2, \dots, y_m),$$

unde

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset R^n, \ (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y \subset R^m.$$

Funcția compusă $g(f)$ realizează corespondența $X \to R^p$ și este definită de

$$g(f(x)) = [g_1(f(x)),\ g_2(f(x)), \ldots,\ g_p\ (f(x))],\ x \in X \subset R^n, \tag{1}$$

și se obține prin compunerea funcțiilor reale g_k, componentele lui g, cu funcția f.

În continuare, compunerea funcției reale $g_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ cu funcția vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ se reduce la compunerea funcției reale g_k cu componentele reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$, adică

$$g_k(f) = g_k(f_1, f_2, \ldots, f_m);$$

prin urmare,

$$g_k(f(x)) = g_k(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

pe care dacă le înlocuim în (1) obținem funcția compusă $g(f)$.

4. Limite de funcții vectoriale

Definiție. Fie funcția vectorială $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ și a un punct de acumulare al mulțimii de definiție X. Se spune că un vector $b \in R^m$ este limita funcției f în punctul a dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît, oricare ar fi $x \neq a$, $x \in X$ și $\| x - a \| < \eta(\varepsilon)$, să avem $\| f(x) - b \| < \varepsilon$ și se scrie

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \tag{1}$$

Dacă punem $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, atunci definiția dată este echivalentă cu

$$\begin{aligned} &|f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_1| < \varepsilon' \\ &|f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_2| < \varepsilon' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &|f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_m| < \varepsilon', \end{aligned}$$

dacă

$$|x_1 - a_1| < \eta(\varepsilon),\ |x_2 - a_2| < \eta(\varepsilon), \ldots,\ |x_n - a_n| < \eta(\varepsilon),$$

și se scrie

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_k,\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Se pot da definiții echivalente atît cu ajutorul vecinătăților cît și cu ajutorul șirurilor.

Proprietățile stabilite la limitele funcțiilor de o variabilă se extind și aici, înlocuindu-se valoarea absolută cu norma.

5. Continuitatea funcțiilor vectoriale

D e f i n i ț i e. **Fie funcția $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ și $a \in X$. Se spune că funcția f este continuă în punctul a, dacă la orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît, oricare ar fi $x \in X$, să avem**

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon,$$

dacă $\|x - a\| < \eta(\varepsilon)$.

Folosind componentele, definiția este echivalentă cu

$$|f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)| < \varepsilon' \ (\varepsilon' \to 0 \text{ dacă } \varepsilon \to 0)$$
$$|f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_2(a_1, a_2, \ldots, a_n)| < \varepsilon'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_m(a_1, a_2, \ldots, a_n)| < \varepsilon',$$

dacă $|x_1 - a_1| < \eta(\varepsilon)$, $|x_2 - a_2| < \eta(\varepsilon), \ldots, |x_n - a_n| < \eta(\varepsilon)$.

Dacă a este punct de acumulare al mulțimii de definiție X, atunci continuitatea în punctul a este echivalentă cu

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ sau } \lim_{x \to a} \|f(x) - f(a)\| = 0.$$

Următoarele proprietăți, stabilite la funcțiile reale de o variabilă reală, continue, se mențin și pentru funcțiile vectoriale continue.

1) Dacă f este continuă în punctul a, există o vecinătate a punctului a în care funcția este mărginită.

2) Dacă funcția $f(x)$ este continuă în punctul a, atunci funcția $\|f(x)\|$ este continuă în punctul a. Reciproca în general nu este adevărată.

3) Dacă f și g sînt continue în punctul a, $f + g$ și λf sînt continue în punctul a.

4) Dacă $\lim_{x \to a} f(x)$ există în R^m și f nu este definită în punctul a, atunci f se poate prelungi prin continuitate în punctul a, punînd $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

5) Fie funcțiile $f: X \to Y \subset R^m$, $g: Y \to R^p$, $X \subset R^n$. Dacă funcția f este continuă în punctul $a \in X$, iar funcția g este continuă în punctul $b = f(a) \in Y$, atunci funcția compusă $g(f): X \to R^p$ este continuă în punctul $a \in X$.

6) Fie funcția *reală* $f: X \to R$, $X \subset R^n$; dacă în punctul $a \in X$, f este continuă și $f(a) \neq 0$, există o vecinătate V a lui a astfel încît pentru $x \in V \cap X$

$$f(x) \cdot f(a) > 0,$$

din care se deduce și

7) Dacă funcția vectorială $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ este continuă în punctul $a \in X$ și $f(a) \neq 0$, atunci există o vecinătate V a punctului a astfel încît pentru $x \in V \cap X$

$$f(x) \neq 0.$$

6. Continuitatea parțială

Definiție. **Fie $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ și $a \in X$. Să considerăm submulțimea X_i a mulțimii de definiție X, dată de**

$$X_i = \{x_i \mid x_i \in R, (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in X\};$$

pe această submulțime, funcția f este o funcție f_i de o singură variabilă reală x_i

$$f_i : x_i \to f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n), \ x_i \in X_i.$$

Dacă funcția f_i este continuă în punctul $a_i \in X_i$, spunem că funcția f este continuă (parțial) în raport cu variabila x_i în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Sau:

Se spune că funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este continuă parțial în raport cu variabila x_i în punctul a dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem

$$| f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) | < \varepsilon$$

pentru orice $x_i \in X_i$ și $| x_i - a_i | < \eta(\varepsilon)$.

Teoremă. O funcție f continuă într-un punct $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.

Demonstrație. Dacă f este continuă în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$, atunci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît

$$\| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \| < \varepsilon,$$

dacă

$$| x_1 - a_1 | < \eta(\varepsilon), \quad | x_2 - a_2 | < \eta(\varepsilon), \ldots, | x_n - a_n | < \eta(\varepsilon).$$

În particular, dacă luăm $x_1 = a_1, \ldots, x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \ldots, x_n = a_n$, avem evident

$$\| f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \| < \varepsilon,$$

dacă $| x_i - a_i | < \eta(\varepsilon)$, deoarece celelalte neegalități sînt satisfăcute.

Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Dacă o funcție este continuă într-un punct în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că este continuă în acel punct.

Exemplu

Fie funcția $f(x, y)$ definită pe R^2 astfel

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3 x y^6}{x^2 + y^{12}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = 0, \ y = 0 \end{cases}$$

Dacă $x = 0$, $\lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = 0$, deci $f(x, y)$ este continuă în raport cu y în punctul $(0, 0)$.
Dacă $y = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = 0$, deci $f(x, y)$ este continuă în raport cu x în punctul $(0, 0)$.

Dacă:

$x \to 0$ şi $y \to 0$, de exemplu pe curba $y^6 = m x$, atunci

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{3 m x^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{3m}{1+m^2}.$$

Limita $\frac{2m}{1+m^2}$ depinde de parametrul m, deci nu este unică; prin urmare, funcţia $f(x, y)$ nu are limită în origine. Rezultă de aici că $f(x, y)$ nu este continuă în origine.

7. Funcţii vectoriale uniform continue

D e f i n i ţ i e. Fie $f: X \to R^m$ continuă pe $X \subset R^n$. Se spune că funcţia f este uniform continuă pe X dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît, oricare ar fi punctele $x, x' \in X$ cu $\| x - x' \| < \eta(\varepsilon)$, să avem $\| f(x) - f(x') \| < \eta(\varepsilon)$.

La fel ca şi pentru funcţiile de o variabilă, numărul $\eta(\varepsilon)$ nu depinde de x şi x', ci numai de ε.

Cu ajutorul componentelor $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ale funcţiei f, avem următoarea definiţie echivalentă.

D e f i n i ţ i e. O funcţie $f: X \to R^m$ este uniform continuă pe $X \subset R^n$ dacă şi numai dacă toate componentele sale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt uniform continue pe X.

Într-adevăr, avem implicaţiile

$$\| f(x) - f(x') \| < \varepsilon \Rightarrow | f_i(x) - f_i(x') | < \varepsilon, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

şi

$$| f_i(x) - f_i(x') | < \frac{\varepsilon}{m}, \; i = 1, 2, \ldots, m \Rightarrow \| f(x) - f(x') \| < \varepsilon,$$

dacă $\| x - x' \| < \eta(\varepsilon)$, $x', x \in X$, care rezultă din neegalităţile

$$| f_i(x) - f_i(x') | \leqslant \| f(x) - f(x') \| \leqslant \sum_{j=1}^{n} | f_j(x) - f_j(x') |,$$

adevărate pentru $i = 1, 2, \ldots, m$.

Avem următoarea

T e o r e m ă. O funcţie f uniform continuă pe o mulţime X este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă.

Se demonstrează la fel ca şi teorema de la aliniatul precedent. Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată, şi anume continuitatea uniformă în raport cu fiecare variabilă în parte a funcţiei f nu atrage continuitatea uniformă a funcţiei f.

8. Funcții vectoriale continue pe intervale compacte

Reamintim că un interval compact în R^n este un interval închis și mărginit în R^n. Proprietățile funcțiilor reale de o variabilă reală continue pe un interval compact se mențin în parte și pentru funcții vectoriale continue pe un interval compact din R^n. Anume:

1) O funcție vectorială continuă pe un interval compact I este mărginită pe I.

2) O funcție vectorială continuă pe un interval compact I este uniform continuă pe I.

3) Pentru o funcție vectorială continuă pe un interval compact I există un punct $\xi \in I$ astfel încît $\|f(\xi)\| = \sup\limits_{x\in I} \|f(x)\|$.

Această proprietate rezultă din faptul că $f(x)$ este continuă pe I dacă $\|f(x)\|$ este continuă pe I (B., cap. VI, § 4, al. 5, proprietatea 2).

4) O funcție reală de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, continuă pe un interval compact $I \subset R^n$, își atinge efectiv marginile pe I.

Exemple

1) Funcția $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ definită pe discul $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ este continuă pe domeniul de definiție. Minimul funcției $f(x, y)$ este atins în punctul $(0, 0)$, unde $f(0, 0) = 0$. Maximul funcției este atins în orice punct (x, y) situat pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$ și are valoarea R.

2) Funcția $f(x, y)$ definită pe discul $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ în modul următor

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^6}{x^2 + y^{12}}, & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{pentru } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nu este uniform continuă pe domeniul de definiție, deoarece nu este continuă în punctul $(0, 0)$.

§ 5. DERIVATE PARȚIALE. DIFERENȚIALE

1. Derivate parțiale. Definiție. Proprietăți

D e f i n i ț i e. Fie $f(x, y)$ o funcție reală de două variabile reale definită pe o mulțime $X \subset R^2$ și (a, b) un punct interior al lui X.

1) Funcția $f(x, y)$ este derivabilă parțial în punctul (a, b) în raport cu variabila x dacă

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

există şi este finită. Limita însăşi se numeşte derivata parţială a funcţiei $f(x,y)$ în raport cu x şi se notează

$$f'_x(a, b), \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}, \quad D_x f(a, b).$$

2) Funcţia $f(x,y)$ este derivabilă parţial în punctul (a,b) în raport cu variabila y dacă

$$\lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

există şi este finită. Limita însăşi se numeşte derivată parţială a funcţiei $f(x,y)$ în raport cu y şi se notează

$$f'_y(a, b), \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}, \quad D_y f(a, b).$$

Observații

1) Din definiţie rezultă că, atunci cînd derivăm parţial în raport cu x variabila y este considerată constantă şi derivăm ca şi cum am avea o singură variabilă x. Această observaţie este valabilă şi cînd derivăm parţial în raport cu y.

2) Dacă o funcţie este derivabilă parţial în raport cu x în fiecare punct al mulţimii de definiţie X, spunem că este derivabilă parţial în raport cu x pe mulţimea X.

Exemple

1) Funcţia $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ definită pe R^2 este derivabilă parţial în raport cu x şi y pe R^2

$$f'_x(x, y) = 2x\, e^{x^2+y^2}, \quad f'_y(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

2) Funcţia $f(x, y) = \ln\,(1 + xy)$ definită pe $X = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R,\ xy > -1\}$ este derivabilă parţial în raport cu x şi y pe X

$$f'_x = \frac{y}{1 + xy}, \quad f'_y = \frac{x}{1 + xy}.$$

În mod asemănător se definesc derivatele parţiale ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale.

Definiţie. **Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie reală de n variabile reale definită pe o mulţime $X \subset R^n$ şi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct interior al lui X. Funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este derivabilă parţial în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ în raport cu variabila x_k dacă**

$$\lim_{x \to x_k} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_k - a_k}$$

există și este finită. Limita însăși se numește derivata parțială a funcției $f(x_1, \ldots, x_n)$ în raport cu x_k și se notează

$$f'_{x_k}(a_1, \ldots, a_n), \ \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_k}, \ D_{x_k} f(a_1, \ldots, a_n).$$

O funcție $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are n derivate parțiale.

Aplicație

O funcție $f(x, y, z)$ definită pe $X \subset R^3$ are trei derivate parțiale. Dacă $(a, b, c) \in X$, avem

$$1) \lim_{x \to a} \frac{f(x, b, c) - f(a, b, c)}{x - a} = f'_x(a, b, c)$$

$$2) \lim_{y \to b} \frac{f(a, y, c) - f(a, b, c)}{y - b} = f'_y(a, b, c)$$

$$3) \lim_{z \to c} \frac{f(a, b, z) - f(a, b, c)}{z - c} = f'_z(a, b, c)$$

Exemplu

$f(x, y, z) = \ln(1 + x^2y^2z^2)$ definită pe R^3 are derivatele parțiale

$$f'_x = \frac{2x\, y^2 z^2}{1 + x^2y^2z^2}, \quad f'_y = \frac{2yx^2z^2}{1 + x^2y^2z^2}, \quad f'_z = \frac{2z\, x^2y^2}{1 + x^2y^2z^2}$$

pentru orice $(x, y, z) \in R^3$.

Proprietățile funcțiilor reale de o variabilă reală, derivabile, se mențin în parte și pentru funcțiile reale de mai multe variabile.

1) Dacă funcția reală $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu x_k în punctul $a = (a_1, \ldots, a_n)$, atunci f este continuă parțial în raport cu variabila x_k în punctul a.

Într-adevăr, funcția de o variabilă $f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, fiind derivabilă în raport cu x_k în punctul a, este continuă în punctul a în raport cu variabila x_k.

2) Dacă funcția reală $f(x_1, \ldots, x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă $x_1, \ldots, x_n$, în punctul a, atunci f este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte în punctul a.

3) Deoarece derivarea parțială în raport cu o variabilă x_k este de fapt derivarea funcției în raport cu x_k, celelalte variabile fiind considerate constante, urmează că

a) regulile de derivare stabilite pentru funcțiile de o variabilă se mențin și pentru derivarea parțială;

b) operațiile algebrice efectuate asupra funcțiilor derivabile parțial conduc tot la funcții derivabile parțial, adică suma, diferența, produsul, cîtul a două funcții derivabile parțial reprezintă tot o funcție derivabilă parțial.

Definiție. Fie $f(x)$ o funcție vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ de variabila vectorială $x = (x_1, \ldots, x_n)$ definită pe o mulțime $X \subset R^n$ cu valori în R^m, componentele $f_1, f_2, \ldots, f_m$ fiind funcții reale derivabile parțial în raport cu fiecare variabilă $x_1, x_2, \ldots, x_n$, într-un punct $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$.

Derivata parțială a funcției f în raport cu x_k în punctul a, pe care o notăm $f'_{x_k}(a)$, este definită de

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_k - a_k}.$$

Dacă considerăm funcția $f(x)$ raportată la o bază $e_1, \ldots, e_m$, atunci

$$f(x) = e_1 f_1(x_1, \ldots, x_n) + e_2 f_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + e_m f_m(x_1, \ldots, x_n),$$

deci derivata parțială $f'_{x_k}(a)$ are componentele

$$\frac{\partial f_1(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial f_2(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_k}, \ldots, \quad \frac{\partial f_m(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_k}.$$

Aplicații

1) Fie $\overline{F}(\overline{r}) = \overline{i} f_1(x, y, z) + \overline{j} f_2(x, y, z) + \overline{k} f_3(x, y, z)$ cu f_1, f_2, f_3 definite și derivabile pe un domeniu $D \subset R^3$.

Derivatele parțiale ale funcției $\overline{F}(\overline{r})$ sînt

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial x} = \overline{i} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \overline{j} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \overline{k} \frac{\partial f_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial y} = \overline{i} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \overline{j} \frac{\partial f_2}{\partial y} + \overline{k} \frac{\partial f_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial z} = \overline{i} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \overline{j} \frac{\partial f_2}{\partial z} + \overline{k} \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

pentru $(x, y, z) \in D$.

Exemplu

$$\overline{F}(\overline{r}) = \overline{i} \frac{x}{y^2 + z^2 + 1} + \overline{j} \frac{y}{z^2 + x^2 + 1} + \overline{k} \frac{z}{x^2 + y^2 + 1}$$

definită pe R^3 are derivatele parțiale

$$\frac{\partial \overline{F}(\overline{r})}{\partial x} = \overline{i} \frac{1}{y^2 + z^2 + 1} + \overline{j} \frac{-2xy}{(x^2 + z^2 + 1)^2} + \overline{k} \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial \overline{F}(\overline{r})}{\partial y} = \overline{i} \frac{-2xy}{(y^2 + z^2 + 1)^2} + \overline{j} \frac{1}{z^2 + x^2 + 1} + \overline{k} \frac{-2yz}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial \overline{F}(\overline{r})}{\partial z} = \overline{i} \frac{-2xz}{(y^2 + z^2 + 1)^2} + \overline{j} \frac{-2yz}{(x^2 + z^2 + 1)^2} + \overline{k} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

2. Derivate parțiale de ordin superior

Fie $f(x, y)$ o funcție reală de două variabile reale definită pe $X \subset R^2$, derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă x, y în punctele interioare ale lui X. Dacă derivatele parțiale $f'_x(x, y)$ și $f'_y(x, y)$ definite pe $X \subset R^2$ sînt la rîndul lor derivabile parțial în raport cu x și y, derivatele lor parțiale se numesc derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f și se notează

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f'_x)'_x = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f'_x)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f'_y)'_x = f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f'_y)'_y = f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Deci o funcție de două variabile are patru derivate parțiale de ordinul doi. În general, o funcție reală de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are n^2 derivate parțiale de ordinul doi, și anume

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplu

Fie funcția $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ definită pe R^2. Avem

$$f'_x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad f'_y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$f''_{x^2} = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2};$$

$$f''_{xy} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yx} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

și se observă că $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Derivatele parțiale f''_{xy} și f''_{yx} (numite și derivatele parțiale mixte) în general nu sînt egale. Următoarea teoremă stabilește condiții suficiente ca derivatele parțiale mixte să fie egale.

Teoremă (A. Schwarz). Dacă funcția $f(x,y)$ are derivate parțiale mixte de ordinul doi într-o vecinătate V a lui $(x,y) \in X$ și dacă f''_{xy} este continuă în (x,y), atunci $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Demonstrație. Plecăm de la expresia

$$E = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

Fie

$$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y),$$

unde presupunem pe y deocamdată constant. Cu ajutorul lui $\varphi(x)$, E se scrie

$$E = \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

Funcția $\varphi(x)$ este continuă și derivabilă, deci

$$\varphi'_x(x) = f'_x(x, y+k) - f'_x(x, y). \tag{1}$$

Dacă aplicăm formula creșterilor finite lui E, avem

$$E = h\,\varphi'_x(\xi), \qquad x < \xi < x+h,$$

și dacă ținem seama de (1) obținem

$$E = h\,[f'_x(\xi, y+k) - f'_x(\xi, y)].$$

Dacă îi mai aplicăm o dată formula creșterilor finite, avem

$$E = hk\,f''_{xy}(\xi, \eta), \qquad \xi \in (x, x+h), \qquad \eta \in (y, y+k). \tag{2}$$

Revenind la funcția φ,

$$\lim_{k\to 0}\frac{\varphi(x)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = f'_y(x, y),$$

deci

$$\lim_{k\to 0}\frac{E}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{k} = f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y),$$

și, în continuare, ținînd seama de continuitatea lui f''_{xy} și de (2), obținem

$$\frac{E}{k} = h\,f''_{xy}(\xi, \eta) \text{ și } \lim_{k\to 0}\frac{E}{k} = h\,f''_{xy}(\xi, y).$$

Am obținut egalitatea

$$h\,f''_{xy}(\xi, y) = f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y).$$

Împărțind cu h, avem

$$f''_{xy}(\xi, y) = \frac{f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)}{h}.$$

Avînd în vedere continuitatea lui f''_{xy} și existența derivatei f''_{yx}, la limită, cînd $h \to 0$, rezultă

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

și teorema este demonstrată.

Rezultatul obținut se menține și pentru derivatele de ordin superior, și anume dacă $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ sînt continue într-o vecinătate a punctului (x, y) ele sînt egale. Într-adevăr

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

și

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}.$$

În general

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^n \partial y^m} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \partial x^n} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^{m-1} \partial x^n \partial y} = \cdots$$

Teorema rămîne adevărată și pentru funcțiile reale sau vectoriale de trei sau mai multe variabile.

Pentru o funcție reală $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, derivata de ordinul k în care se derivează parțial de α_1 ori în raport cu x_1, de α_2 ori în raport cu x_2 ș.a.m.d., de α_n ori în raport cu x_n, și $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k$, se scrie

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

și, dacă funcția împreună cu toate derivatele pînă la ordinul k inclusiv sînt continue, ordinea de derivare parțială nu influențează rezultatul. În aceste condiții, numărul derivatelor parțiale de ordinul k, distincte, este dat de combinările cu repetiție a n obiecte luate cîte k

$$\Upsilon_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Exemplu

O funcție de trei variabile $f(x, y, z)$ are $C_5^3 = 10$ derivate parțiale de ordinul trei distincte

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}.$$

3. Diferențiala unei funcții de mai multe variabile

Fie $f(x, y)$ o funcție reală derivabilă parțial pe un interval $I \subset R^2$, (a, b) un punct interior lui I, în punctul (a, b) derivatele parțiale $f'_x(a, b)$ $f'_y(a, b)$ fiind continue. Diferența

$$f(x, y) - f(a, b)$$

se mai scrie

$$f(x, y) - f(a, b) = (f(x, y) - f(a, y)) + (f(a, y) - f(a, b))$$

şi, dacă aplicăm formula creşterilor finite în fiecare paranteză, avem

$$f(x, y) - f(a, y) = (x - a)\ f'_x(\xi, y), \quad a < \xi < x,$$
$$f(a, y) - f(a, b) = (y - b)\ f'_y(a, \eta), \quad b < \eta < y,$$

deci

$$f(x, y) - f(a, b) = (x - a) f'_x(\xi, y) + (y - b) f'_y(,a\ \eta).$$

Însă derivatele parţiale sînt continue în punctul (a, b); prin urmare, putem pune

$$f'_x(\xi, y) = f'_x(a, b) + (f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b)) = f'_x(a, b) + \theta_1(x, y),$$
$$f'_y(a, \eta) = f'_y(a, b) + f'_y(a, \eta) - f'_y(a, b) = f'_y(a, b) + \theta_2(x, y),$$

cu $\theta_1(x, y) \to 0$, $\theta_2(x, y) \to 0$ cînd $x \to a$, $y \to b$, astfel încît avem relaţia

$$f(x, y) - f(a, b) = (x - a) f'_x(a, b) + (y - b) f'_y(a, b) +$$
$$+ (x - a)\ \theta_1(x, y) + (x - b)\ \theta_2(x, y),$$

iar pentru puncte (x, y) suficient de aproape de (a, b)

$$f(x, y) - f(a, b) \simeq (x - a) f'_x(a, b) + (y - b) f'_y(a, b) \tag{1}$$

şi, dacă notăm $x - a = h$, $y - b = k$, (1) se scrie

$$f(x, y) - f(a, b) \simeq h f'_x(a, b) + k f'_y(a, b).$$

Definiţia diferenţialei. Funcţia $hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b)$, $h \in R$, $k \in R$, **care depinde liniar de h şi k, se numeşte diferenţiala funcţiei $f(x, y)$ în punctul (a, b) şi se notează**

$$\mathrm{d}f(a, b) = h f'_x(a, b) + k f'_y(a, b).$$

Să observăm că $h = x - a$ este diferenţiala funcţiei $\varphi(x, y) = x$, iar $k = y - b$ este diferenţiala funcţiei $\Psi(x, y) = y$, ambele definite pe R^2. Într-adevăr, $\varphi'_x \equiv 1$, $\varphi'_y \equiv 0$, $\psi'_x \equiv 0$, $\psi'_y \equiv 1$; prin urmare,

$$h = \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}x, \ k = \mathrm{d}\psi = \mathrm{d}y.$$

Cu aceste notaţii, diferenţiala funcţiei $f(x, y)$ într-un punct (x, y) în care f are derivate parţiale continue se scrie

$$\mathrm{d}f(x, y) = f'_x(x, y)\ \mathrm{d}x + f'_y(x, y)\ \mathrm{d}y$$

sau

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Operatorul

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy$$

care *aplicat* funcției f ne dă diferențiala funcției f în punctul (x, y) se numește *operatorul de diferențiere.*

a) Pentru o funcție reală de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, diferențiala se definește în mod asemănător

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n,$$

iar *operatorul de diferențiere* este

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n.$$

b) Pentru o funcție vectorială $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită pe o mulțime $X \subset R^n$ cu valori în R^m, diferențiala se definește în mod asemănător

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n$$

ca și pentru funcțiile reale.

Exemple

1) Funcția $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ definită pe R^3 este derivabilă parțial pe $R^3 - \{0\}$. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

deci

$$df = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (x, y, z) \in R^3 - \{0\}.$$

2) Funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$ definită pe R^n este derivabilă parțial pe R^n

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{2x_k}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

și are diferențiala

$$df = \sum_1^n \frac{2x_k\,dx_k}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Diferențiala unei funcții f de mai multe variabile se numește și *diferențiala totală* a funcției f.

4. Proprietățile diferențialei funcțiilor de mai multe variabile

a) **T e o r e m ă. Condiția necesară și suficientă pentru ca diferențiala unei funcții $f(x, y)$ definită pe un interval $I \subset R^2$ să fie identic nulă pe I este ca $f(x, y)$ să fie constantă pe I.**

Demonstrație. Dacă $f(x, y) = a$ pentru orice $(x, y) \in I$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0,$$

deci

$$\mathrm{d}f \equiv 0 \quad \text{pe} \quad I.$$

Reciproc, dacă $\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$, pentru orice $(x, y) \in I$, în particular pentru x constant, $\mathrm{d}f = 0$; însă în această situație $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$ pentru orice $(x, y) \in I$ (x constant) și, conform unui rezultat obținut anterior (B., cap. IV, § 5, al. 6), funcția $f(x, y)$ nu depinde de y pe I.

În mod asemănător, pentru coordonata y constantă, avem $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x \equiv 0$, $(x, y) \in I$, deci pe I, f nu depinde nici de x. În concluzie, $f(x, y)$ este constantă pe I.

b) **T e o r e m ă. Dacă o expresie diferențială**

$$E = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

cu funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$, continue pe un interval $I \subset R^2$, este diferențiala unei funcții $f(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in I$, atunci

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \; Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

pentru orice $(x, y) \in I$.

Demonstrație. Pentru $(x, y) \in I$ avem

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

și

$$\mathrm{d}f = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

deci pentru orice $(x, y) \in I$

$$\left(P(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(Q(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}y = 0,$$

de unde rezultă, conform teoremei precedente, că

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \; Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \text{ pentru orice } (x, y) \in I.$$

Proprietățile *a* și *b* se mențin și pentru funcții reale de mai multe variabile.

a') Condiția necesară și suficientă pentru ca diferențiala unei funcții $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită pe un interval $I \subset R^n$ să fie identic nulă pe I este ca $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să fie constantă pe I.

b') Dacă o expresie diferențială

$$P_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 + \ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n,$$

cu funcțiile componente $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, continue pe un interval $I \subset R^n$, este diferențiala unei funcții reale $f(x_1, \ldots, x_n)$, pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I$, atunci

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1},\; P_2(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots,\; P_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in I \subset R^n$.

5. Diferențiale de ordin superior

D e f i n i ț i e. Fie $f(x, y)$ o funcție de două variabile definită pe $I \subset R^2$ derivabilă parțial de două ori în I cu toate derivatele parțiale de ordinul doi (deci și de ordinul întîi) continue. Diferențiala de ordinul doi se notează $d^2 f(x, y)$ și este definită de

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Se observă că $d^2 f$ se obține diferențiind diferențiala întîia

$$d\,(df(x, y)) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\right)$$

cu $d\,(dx) = 0$, $d\,(dy) = 0$.

Operatorul

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\, \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\, dx dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^{(2)}$$

se numește *operatorul de diferențiere de ordinul doi*. Cu ajutorul acestui operator diferențiala a doua se scrie

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^{(2)} f.$$

D e f i n i ț i e. Fie funcția $f(x, y)$ de două variabile definită pe $I \subset R^2$ care are în I toate derivatele parțiale de ordinul n și toate aceste derivate sînt continue; diferențiala de ordinul n a funcției $f(x, y)$ se notează $d^n f$ și este definită de

$$d^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\, dx^n + C_n^1\, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\, \partial y}\, dx^{n-1}\, dy + \ldots$$

$$\ldots + C_n^k\, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\, \partial y^k}\, dx^{n-k}\, dy^k + \ldots + C_n^n\, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\, dy^n.$$

Dacă introducem operatorul de diferenţiere de ordinul n

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^{(n)},$$

atunci

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^{(n)} f$$

şi se observă că

$$d^n f = d\,(d^{n-1} f).$$

Pentru funcţii (reale sau vectoriale) de n variabile, diferenţiala de ordinul p se defineşte în mod asemănător:

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n\right)^{(p)} f.$$

Operatorul

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n\right)^{(p)}$$

este operatorul de diferenţiere de ordinul p şi se dezvoltă după regula de dezvoltare a unui polinom [A., cap. II, § 1, al. 9].

Exemplu

Diferenţiala a doua a funcţiei $f(x, y, z) = \ln(ax + by + cz)$ definită pentru $ax + by + cz > 0$, $(x, y, z) \in R^3$.

Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{a}{ax + by + cz}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{b}{ax + by + cz}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{c}{ax + by + cz}$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{a^2}{(ax + by + cz)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -\frac{ab}{(ax + by + cz)^2}, \ldots,$$

deci

$$d^2 f(x, y, z) = -\frac{(a dx + b dy + c dz)^2}{(ax + by + cz)^2}, \; ax + by + cz > 0.$$

În general

$$d^n f(x, y, z) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\, \frac{(a dx + b dy + c dz)^n}{(ax + by + cz)^n}.$$

6. Derivatele şi diferenţialele funcţiilor compuse

a) **Teoremă. Dacă funcţiile $u(x)$, $v(x)$ definite pe aceeaşi mulţime $X \subset R$ au derivate continue pe X, dacă funcţia $f(u, v)$ definită pe $Y \subset R^2$ are derivate parţiale continue pe Y, atunci funcţia**

$$F(x) = f(u(x), v(x))$$

are derivata continuă pe X, dată de

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Demonstrație. Fie x_0 un punct oarecare al mulțimii X. Punem

$$u(x_0) = u_0,\ v(x_0) = v_0,$$

deci

$$f(u, v) - f(u_0, v_0) = f'_u \cdot (u - u_0) + f'_v (v - v_0) + (u - u_0) \cdot \theta_1 (u, v) + (v - v_0)\, \theta_2 (u, v)$$

și, conform rezultatului obținut mai sus la aliniatul 3, $\theta_1 (u, v) \to 0$, $\theta_2 (u, v) \to 0$ cînd $u \to u_0$, $v \to v_0$.

Prin urmare,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(u, v) - f(u_0, v_0)}{x - x_0} = f'_u (u_0, v_0) \frac{u - u_0}{x - x_0} + f'_v (u_0, v_0) \frac{v - v_0}{x - x_0} + \frac{u - u_0}{x - x_0}\, \theta_1 (u, v) + \frac{v - v_0}{x - x_0}\, \theta_2 (u, v).$$

La limită, cînd $x \to x_0$, $u \to u_0$, $v \to v_0$, avem

$$\frac{u - u_0}{x - x_0} \to u'(x_0),\ \frac{v - v_0}{x - x_0} \to v'(x_0)$$

și

$$\theta_1 (u, v) \to 0,\ \theta_2 (u, v) \to 0.$$

de unde obținem

$$F'(x_0) = u'_x (x_0) \cdot f'_u (u_0, v_0) + v'_x (x_0) \cdot f'_v (u_0, v_0)$$

pentru că x_0 este un punct oarecare din X, teorema este demonstrată.

În mod asemănător avem pentru

$$F(x) = f(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$$

următoarea regulă de derivare:

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \cdot \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x}.$$

b) **Diferențiala funcției** $F(x)$ este dată de

$$\mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

și, pentru că $\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, diferențiala se mai poate scrie

$$\mathrm{d}F(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\,\mathrm{d}u_n,$$

anume „diferențiala este invariantă față de operația de compunere a funcțiilor".

În particular, pentru $F(x) = f(u(x), v(x))$ avem

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

Rezultatele obținute se mențin și pentru funcții vectoriale.

Exemplu

Fie $F(x) = f(1 + x^2, \sin x)$ definită pentru $x \in R$. Avem, cu $u = 1 + x^2$, $v = \sin x$,

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cos x.$$

Diferențiala o putem calcula direct, și anume

$$dF = F'(x)\, dx = \left(\frac{\partial f}{\partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cos x\right) dx$$

sau după formula

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{\partial f}{\partial u} 2x dx + \frac{\partial f}{\partial v} \cos x\, dx;$$

rezultatul este același.

Aplicație. Funcții omogene. Relația lui Euler

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ o funcție de p variabile; o astfel de funcție se numește omogenă de grad m în $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dacă, înlocuind pe x_1 cu tx_1, pe x_2 cu $tx_2, \ldots$, pe x_p cu tx_p, avem

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_p) \equiv t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

Dacă această ultimă relație o derivăm parțial în raport cu t, apoi facem $t = 1$, obținem egalitatea

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_p \frac{\partial f}{\partial x_p} = mf(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

numită și relația lui Euler. Ea caracterizează funcțiile omogene de grad m.

c) **Derivatele și diferențialele de ordin superior** se calculează în mod analog ca la a și b.

Astfel, dacă $F(x) = f(u(x), v(x))$, avem

$$F''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{dv}{dx}\right) \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{d^2 u}{dx^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{dv}{dx}\right) \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d^2 v}{dx^2}$$

și

$$d^2F = F'' dx^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial f}{\partial u} d^2 u +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} du\, dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial f}{\partial v} d^2 v.$$

Se vede că $f(u, v)$ trebuie să aibă derivate parțiale de ordinul doi continue, iar funcțiile $u(x)$, $v(x)$ să fie derivabile continuu de două ori. Se observă că d^2F se scrie

$$d^2F = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv\right)^2 f + \left(\frac{\partial}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial}{\partial v} d^2 v\right) f.$$

d) **Teoremă. Dacă funcțiile $u(x, y)$, $v(x, y)$, definite pe aceeași mul-țime $X \subset R^2$, au derivate parțiale continue pe X, dacă $f(u, v)$ are derivate parțial continue pe $Y \subset R^2$, atunci funcția**

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

are derivate parțiale continue pe $X \subset R^2$, date de

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{1}$$

Demonstrația rezultă din teorema de la punctul *a*, deoarece în operați de derivare parțială în raport cu x, de exemplu, y este constant, deci F este considerată funcție numai de o variabilă.

e) Diferențiala funcției $F(x, y)$ este dată de

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

și dacă ținem seama de (1)

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)$$

și de

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

$\mathrm{d}F$ are următoarele două forme echivalente:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v,$$

adică „diferențiala este invariantă față de operația de compunere a funcțiilor".

Exemplu

Fie $F(x, y) = f(x^2 + y^2, 1 + xy)$ definită pentru $(x, y) \in R^2$. Avem, dacă punem $u = x^2 + y^2$, $v = 1 + xy$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\,2x + \frac{\partial f}{\partial v}\,y;\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\,2y + \frac{\partial f}{\partial v}\,x.$$

Diferențiala $\mathrm{d}F$ o putem calcula atît direct

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\,2x + \frac{\partial f}{\partial y}\,y\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\,2y + \frac{\partial f}{\partial y}\,x\right)\mathrm{d}y,$$

cît şi prin intermediul diferenţialelor lui u şi v;

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv = \frac{\partial f}{\partial u}\,(2x dx + 2y dy) + \frac{\partial f}{\partial v}\,(x dy + y dx),$$

şi se vede că este aceeaşi.

f) Derivatele parţiale de ordin superior şi diferenţialele de ordin superior se calculează în mod asemănător

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}.$$

Pentru diferenţiala a doua avem

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, dy^2,$$

deci

$$d^2F = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] dx^2 + 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right] dx\, dy + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] dy^2$$

şi pentru că $\frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy = du$, $\frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = dv$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dy^2 = d^2u,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\, dy^2 = d^2v,$$

diferențiala a doua se mai scrie

$$d^2F = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u} d^2u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2v$$

sau

$$d^2F = d^2f + \frac{\partial f}{\partial u} d^2u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2v,$$

formă din care se vede că *„diferențiala a doua nu mai este invariantă* față de operația de compunere a funcțiilor".

g) Pentru funcțiile de mai multe argumente

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_p),$$

cu $u_k = u_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se procedează în mod asemănător. Dacă punem

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(u_1, u_2, \ldots, u_p),$$

avem

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_p}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}, \ k = 1, 2, \ldots, n$$

și

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n,$$

în care dacă înlocuim pe $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ cu expresiile lor obținem

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_p} du_p,$$

deci în acest caz „diferențiala de ordinul întîi este invariantă față de operația de compunere a funcțiilor".

7. Derivata după o direcție. Gradient. Divergență. Rotor

a) Definiție. Fie $f(x, y, z)$ o funcție reală definită pe $X \subset R^3$ derivabilă parțial pe X și (a, b, c) un punct interior lui X. Fie dreapta (D)

$$x = \alpha\rho + a, \ y = \beta\rho + b, \ z = \gamma\rho + c,$$

care trece prin punctul (a, b, c) și are cosinusurile directoare (α, β, γ). Limita

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in D}} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0}, \ M(x, y, z), \ M_0(a, b, c),$$

se numește derivata după direcția L definită de cosinusurile directoare (α, β, γ) în punctul $M_0(a, b, c)$. Se notează $\frac{df}{dL}$ și expresia ei este

$$\frac{df(a, b, c)}{dL} = \alpha\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial x} + \beta\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial z}. \quad (1)$$

Demonstrație. Observăm că

$$\frac{f(M)-f(M_0)}{MM_0}=\frac{f(\alpha\rho+a,\beta\rho+b,\gamma\rho+c)-f(a,b,c)}{\rho},$$

unde $\rho=\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, deoarece

$$x-a=\alpha\rho,\ y-b=\beta\rho,\ z-c=\gamma\rho$$

și

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2(\alpha^2+\beta^2+\rho^2)=\rho^2.$$

Dacă considerăm funcția de ρ

$$\varphi(\rho)=f(\alpha\rho+a,\ \beta\rho+b,\ \gamma\rho+c),$$

atunci

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in D}}\frac{f(M)-f(M_0)}{MM_0}=\varphi'_\rho(0).$$

Însă

$$\varphi'_\rho(0)=\alpha\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial x}+\beta\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial z},$$

dacă calculăm derivata lui $\varphi(\rho)$ în punctul $\rho=0$, după regula de derivare a funcțiilor compuse. Formula (1) este demonstrată.

b) **Definiție. Fie $U(x,y,z)$ o funcție reală definită pe $X\subset R^3$, derivabilă parțial pe X. Se numește gradientul funcției U sau gradientul cîmpului scalar U și se notează grad U funcția vectorială**

$$\text{grad } U=\bar{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial U}{\partial z},\ (x,y,z)\in X\subset R^3.$$

Dacă considerăm familia de suprafețe $U(x,y,z)=C$, C fiind o constantă arbitrară, prin fiecare punct $(a,b,c)\subset X$ trece o suprafață din familie, definită de $U(x,y,z)=U(a,b,c)$, numită *suprafața de nivel*. Normala la suprafața de nivel $U(x,y,z)=U(a,b,c)$ într-un punct (x_0,y_0,z_0) de pe suprafață are parametrii directori derivatele parțiale

$$\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}$$

calculate în punctul (x_0,y_0,z_0), de unde rezultă imediat că vectorul grad $U(x_0,y_0,z_0)$ este normal la suprafața de nivel în punctul (x_0,y_0,z_0).

Dacă se introduce operatorul $\nabla=\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$, numit *operatorul nabla* sau *operatorul lui Hamilton*, observăm că putem scrie

$$\text{grad } U=\nabla U.$$

c) **Definiție. Fie $\bar{V}(x,y,z)=\bar{i}P(x,y,z)+\bar{j}Q(x,y,z)+\bar{k}R(x,y,z)$ o funcție vectorială definită pe $X\subset R^3$ cu valori în R^3, derivabilă parțial**

pe X. Se numește divergența funcției $\overline{V}$ sau divergența cîmpului vectorial $\overline{V}$ și se notează div $\overline{V}$ funcția scalară

$$\text{div } \overline{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \ (x, y, z) \in X.$$

Cu ajutorul operatorului ∇, div $\overline{V}$ se scrie simbolic ca produsul scalar între operatorul ∇ și vectorul $\overline{V}$

$$\text{div } \overline{V} = \nabla \cdot \overline{V}.$$

d) Fie $\overline{V}(x, y, z) = \overline{i}P(x, y, z) + \overline{j}Q(x, y, z) + \overline{k}R(x, y, z)$ o funcție vectorială definită pe $X \subset R^3$ cu valori în R^3, derivabilă parțial pe X. Se numește rotorul funcției V sau rotorul cîmpului vectorial $\overline{V}$ și se notează rot $\overline{V}$ funcția vectorială

$$\text{rot } \overline{V} = \overline{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \overline{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Observații

1) Divergența cîmpului rot V este o funcție identic nulă pe domeniul de definiție dacă P, Q, R au derivate de ordinul doi continue.

Avem

$$\text{div rot } \overline{V} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \equiv 0,$$

2) Să calculăm divergența cîmpului grad U.

Avem

$$\text{div } \left(\overline{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Operatorul

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

se numește „*laplasianul*" sau operatorul lui *Laplace*.

Exemple

1) Fie $\overline{r} = \overline{i}x + \overline{j}y + \overline{k}z$, numit cîmpul vectorilor de poziție.
Avem div $\overline{r} = 3$, rot $\overline{r} = 0$.

2) Fie $\overline{r} = \overline{i}x + \overline{j}y + \overline{k}z$, $\overline{a} = \overline{i}a_1 + \overline{j}a_2 + \overline{k}a_3$: avem grad $(\overline{r}, \overline{a}) = \overline{a}$, $\overline{a}$ vector constant.

3) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\text{grad } r = \overline{i}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \overline{j}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \overline{k}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

deci

$$\text{grad } r = \frac{\overline{r}}{r}.$$

§ 6. FORMULA LUI TAYLOR PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

1. Formula lui Taylor pentru funcții de două variabile

Fie $f(x, y)$ o funcție de două variabile definită pe $X \subset R^2$, derivabilă de $n+1$ ori pe X, cu toate derivatele mixte egale (adică nu are importanță ordinea în care se derivează), și (a, b) un punct interior lui X. Să considerăm funcția de t

$$F(t) = f(a + (x - a)t, b + (y - b)t)$$

$(a, b) \in X$, $(x, y) \in X$ și $t \in [0, 1]$. Pentru $t = 0$, $F(0) = f(a, b)$ și $t = 1$, $F(1) = f(x, y)$.

Deoarece f are derivate pînă la ordinul $n + 1$ pe X, urmează că și $F(t)$ este derivabilă pînă la ordinul $n + 1$ pe $[0,1]$ iar funcției de t, $F(t)$, îi putem aplica formula lui Taylor stabilită pentru funcțiile de o variabilă. Avem

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + R_n,$$

cu

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

După cum am văzut,

$$F(1) = f(x, y), \; F(0) = f(a, b).$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior ale funcției $F(t)$ în punctul 0 folosim formula obținută la funcții compuse; anume, dacă scriem

$$F(t) = f(x(t), y(t)),$$

$$x(t) = a + (x - a)t, \; y(t) = b + (y - b)t,$$

această formulă (B., cap. VI, § 5, al. 4) are expresia

$$\mathrm{d}^m F(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^m f(x(t), y(t)),$$

deci

$$\mathrm{d}^m F(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial}{\partial y}(y - b)\right)^m f(x(t), y(t))\,\mathrm{d}t^m$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^m F(t)}{\mathrm{d}t^m} = \left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x(t), y(t)),$$

astfel încît pentru $t = 0$

$$F^{(m)}(0) = \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a, b).$$

Cu acest rezultat, formula lui Taylor pentru funcţia $f(x, y)$ în punctul (a, b) se scrie

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) + R_n,$$

cu

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b)),$$

unde

$$0 < \theta < 1.$$

Observaţie

Deoarece funcţia f are derivate de ordinul $n+1$ pe X, urmează că într-o vecinătate $V \subset X$ a lui $(a, b) \in X$ toate derivatele parţiale ale lui f de ordinul $n+1$ sînt mărginite. Dacă punem

$$x - a = \rho \cos t, \ y - b = \rho \sin t,$$

$$\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

există un număr $M > 0$, astfel încît

$$|R_n| < \rho^{n+1} \cdot M, \text{ pentru } (x, y) \in V,$$

de unde rezultă că

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|R_n|}{\rho^n} = 0.$$

2. Formula creşterilor finite sau formula lui Lagrange

Teoremă. Dacă $f(x, y)$ definită pe $X \subset R^2$ are derivate parţiale de ordinul întîi pe o vecinătate V a lui $(a, b) \in X$, atunci pentru orice $(x, y) \in V$ există un punct $(\xi, \eta) \in V$ cu $\xi \in (a, x)$, $\eta \in (b, y)$ astfel încît

$$f(x, y) - f(a, b) = (x-a) f'_x(\xi, \eta) + (y-b) f'_y(\xi, \eta).$$

Demonstraţie. Dacă în formula lui Taylor facem $n = 0$, obţinem formula lui Lagrange.

3. Formula lui Taylor pentru funcții de p variabile

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ o funcție de p variabile definită pe $X \subset R^p$, derivabilă de $n+1$ ori pe X, cu toate derivatele mixte egale (adică nu are importanță ordinea în care se derivează) și $a = (a_1, \ldots, a_p)$ un punct interior lui X. In mod asemănător ca la funcții de două variabile se demonstrează formula

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(a_1, a_2, \ldots, a_p) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!}\left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_p - a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]^{(m)} f(a_1, a_2, \ldots, a_p) + R_n \quad (1)$$

cu

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left((x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_p - a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{(n+1)} f(a_1 + \theta(x_1 - a_1), \ldots$$
$$\ldots, a_p + \theta(x_p - a_p)),$$

numită *formula lui Taylor pentru funcții de p variabile.*

Dacă în (1) luăm $n = 0$, obținem formula creșterilor finite sau formula lui Lagrange pentru funcții de p variabile

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) - f(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (x_1 - a_1) f'_{x_1}(\xi_1, \ldots, \xi_p) +$$
$$+ (x_2 - a_2) f'_{x_2}(\xi_1, \ldots, \xi_p) + \ldots + (x_p - a_p) f'_{x_p}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p),$$

cu

$$\xi_1 \in (a_1, x_1),\ \xi_2 \in (a_2, x_2), \ldots,\ \xi_p \in (a_p, x_p).$$

4. Evaluarea erorilor ce provin din calcule numerice

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ o funcție de m variabile căreia trebuie să-i aflăm valoarea pentru $x_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, însă numerele a_i nu sînt cunoscute exact, ci se cunosc numai a'_i. De exemplu, a_i sînt numere iraționale, iar numerele a'_i pe care le introducem în calcule sînt numerele raționale cu p zecimale exacte care aproximează pe a_i. Să punem

$$|a_i - a'_i| < \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$b = f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$
$$b' = f(a'_1, a'_2, \ldots, a'_m).$$

Ne propunem să determinăm o limită superioară a modulului erorii absolute $|b - b'|$. Conform formulei creșterilor finite, avem

$$b - b' = f(a_1, a_2, \ldots, a_m) - f(a'_1, a'_2, \ldots, a'_m) = \sum_{i=1}^{m} (a_i - a'_i)\frac{\partial f(\alpha)}{\partial x_i},$$

unde am notat $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial x_i}$ valoarea derivatei parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ în punctul $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_m)$ cu $a_1' < \alpha_1 < a_1, \ldots, a_m' < \alpha_m < a_m$.

Dacă

$$\left|\frac{\partial f(\alpha)}{\partial x_i}\right| < A_i,\ A_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

putem scrie

$$|b - b'| < \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \cdot A_i,$$

de unde se vede că eroarea totală este suma erorilor produse de fiecare variabilă în parte sau, fizic vorbind, este suma erorilor provenind de la diversele cauze ce pot interveni.

Exemple

1) Se măsoară laturile b şi c ale unui triunghi ABC cu o eroare relativă de 1‰ şi unghiul A cu o eroare absolută de 20′ de arc. Să se găsească eroarea relativă (în procente) cu care poate fi calculată suprafața triunghiului ABC.

Pornim de la formula

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

pe care o logaritmăm

$$\ln S = \ln \frac{1}{2} + \ln b + \ln c + \ln \sin A.$$

Calculăm diferențiala lui $\ln S$

$$\frac{dS}{S} = \frac{db}{b} + \frac{dc}{c} + \frac{\cos A}{\sin A} dA,$$

deci

$$\left|\frac{dS}{S}\right| < \left|\frac{db}{b}\right| + \left|\frac{dc}{c}\right| + |\operatorname{ctg} A| \cdot |dA|.$$

Eroarea relativă se obține înlocuind pe $\left|\frac{db}{b}\right|$, $\left|\frac{dc}{c}\right|$ cu erorile relative şi pe $|dA|$ cu eroarea absolută, date,

$$\left|\frac{dS}{S}\right| \leqslant \frac{1}{1\,000} + \frac{1}{1\,000} + |\operatorname{ctg} A| \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

În procente, eroarea relativă este dată de

$$P\% < 0{,}2 + \frac{3{,}14}{5{,}4} |\operatorname{ctg} A|.$$

Se observă că eroarea relativă depinde de unghiul A. Pentru ca eroarea relativă în evaluarea ariei triunghiului să fie minimă, trebuie ca $A = 90°$; deci dintre cele trei unghiuri ale triunghiului se recomandă să se determine cel cu valoarea mai apropiată de un unghi drept.

2) Să considerăm un pendul fizic căruia îi corespunde un pendul matematic de lungime l și oscilație completă T. Ne propunem să găsim eroarea absolută pe care o facem asupra accelerației gravității dacă lungimea l se aproximează cu o eroare de $\frac{2}{10^3}$ cm și timpul T cu o eroare de $\frac{1}{10^4}$ s. Din formula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

avem

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

deci dacă diferențiem

$$dg = 4\pi^2\left[\frac{dl}{T^2} - \frac{2l\,dT}{T^3}\right].$$

Prin urmare,

$$|dg| < 4\pi^2\left[\frac{2}{10^3}\cdot\frac{1}{T^2} + \frac{2}{T^3}\cdot\frac{1}{10^4}\right].$$

Cu $l = 52$ cm, $T = 1,45$ s, obținem efectiv

$$|dg| < 40\left[\frac{2}{10^3\cdot 2} + \frac{104}{3}\cdot\frac{1}{10^4}\right] \simeq \frac{2}{10}\ \text{cm/s}^2.$$

Dacă înlocuim T și l în expresia lui g obținem

$$g = \frac{2\pi^2 l}{T^2} = 980,72\ \text{cm/s}^2,$$

deci accelerația gravității în punctul considerat este cuprinsă între valorile 980,52 cm/s² și 980, 92 cm/s².

§ 7. MAXIME ȘI MINIME PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

1. Maxime și minime pentru funcții de două variabile

Definiție. Fie $f(x,y)$ o funcție reală de două variabile, definită pe o mulțime $X \in R^2$.

1) Un punct $(a,b) \in X$ se numește punct de minim al funcției $f(x,y)$ dacă există o vecinătate V a lui (a,b) astfel încît pentru orice $(x,y) \in V \cap X$ să avem

$$f(x, y) \geqslant f(a, b).$$

2) Un punct $(a, b) \in X$ se numește punct de maxim al funcției $f(x,y)$ dacă există o vecinătate V a lui (a,b) astfel încît pentru orice $(x,y) \in V \cap X$ să avem

$$f(x, y) \leqslant f(a, b).$$

Maximele sau minimele unei funcții, așa cum sînt definite, sînt *maxime* sau *minime locale* sau *relative*. Se mai numesc și *extreme relative*.

Teoremă. Fie $f(x, y)$ o funcție de două variabile definită pe o mulțime $X \subset R$ și (a, b) un punct interior lui X. Dacă

1) funcția $f(x,y)$ are în punctul (a,b) un extremum,

2) funcția $f(x,y)$ are derivate parțiale de ordinul întîi în punctul (a,b), atunci derivatele parțiale se anulează în punctul (a,b), adică

$$f'_x(a, b) = 0, \quad f'_y(a, b) = 0.$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă luăm $x = a$, funcția $f(a, y)$ este derivabilă în punctul $y = b$ și are în acest punct un extremum, deci, conform teoremei lui Fermat, $f'_y(a, b) = 0$.

Tot astfel, dacă luăm $y = b$, funcția $f(x, b)$ este derivabilă în punctul $x = a$ și are în acest punct un extremum, deci, conform teoremei lui Fermat, $f'_x(a, b) = 0$; teorema este demonstrată.

Observații

1) Într-un punct (a, b) de extremum avem $f'_x(a, b) = 0$, $f'_y(a, b) = 0$; prin urmare, diferențiala $df(a, b) = 0$.

2) Reciproca teoremei demonstrate nu este în general adevărată; dacă într-un punct (a, b) avem $f'_x(a, b) = 0$, $f'_y(a, b) = 0$, nu rezultă cu necesitate că punctul (a, b) este un punct de extremum.

Un punct (a, b) pentru care $df(a, b) = 0$ sau, ceea ce este același lucru, $f'_x(a, b) = 0$, $f'_y(a, b) = 0$, se numește un *punct staționar.*

3) Din teorema stabilită mai rezultă că punctele de extremum se găsesc cu necesitate printre soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

însă nu toate soluțiile sistemului (1) sînt puncte de extremum.

Exemple

1) Fie funcția $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y. \text{ Avem } df = 0 \text{ pentru } x = 1, \ y = 0.$$

Punctul (1,0) este punct de minim, deoarece $f(x, y) - f(1,0) = x^2 + y^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 + y^2 - 1 < 0$, pentru (x, y) suficient de aproape de (1,0).

2) Fie funcția $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y. \text{ Avem } df = 0 \text{ pentru } x = -1, y = 0.$$

Punctul $(-1, 0)$ nu este punct de extremum, deoarece

$$f(x, y) - f(1, 0) = x^2 - y^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 - y^2;$$

$f(x, y) - f(1, 0) > 0$ dacă $|x + 1| > |y|$ și $f(x, y) - f(1, 0) < 0$ dacă $|x + 1| < |y|$.

Ca să putem recunoaște în punctele staționare *unele* puncte de extremum, trebuie să ținem seama și de derivatele parțiale de ordinul doi.

Teoremă. Fie $f(x,y)$ o funcție definită pe $X\subset R^2$, derivabilă parțial de trei ori pe X. Fie (a,b) o soluție a sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

1) Dacă în punctul (a,b) avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2>0$$

și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0,$$

atunci punctul (a,b) este un punct de minim al funcției $f(x,y)$.

2) Dacă în punctul (a,b) avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2>0$$

și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0,$$

atunci punctul (a,b) este un punct de maxim al funcției $f(x,y)$.

3) Dacă în punctul (a,b) avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2<0,$$

atunci punctul (a,b) nu este punct de extremum al funcției $f(x,y)$.

Demonstrație. Formula lui Taylor aplicată funcției $f(x, y)$ cu restul R_2 este

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+$$
$$+(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+R_2,$$

unde toate derivatele parțiale ce intervin sînt calculate în punctul (a, b).

Să presupunem acum că punctul (a, b) este un punct staționar, adică este o soluție a sistemului $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. In această situație avem

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+$$
$$+\frac{1}{2}(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+R_2.$$

Am văzut (cap. VI, §6, al. 1) că $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{R_2}{\rho^2} = 0$, unde $x - a = \rho \cos \theta$, $y - b = \rho \sin \theta$, $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, deci pentru ρ suficient de mic, adică pentru (x, y) suficient de aproape de (a, b), diferența $f(x, y) - f(a, b)$ are semnul trinomului

$$E = \frac{1}{2}(x-a)^2 r + (x-a)(y-b)\, s + \frac{1}{2}(y-b)^2 t,$$

unde am pus $$r = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}.$$

Putem scrie pe E în modul următor:

$$E = \frac{1}{2}(y-b)^2 \left[r\left(\frac{x-a}{y-b}\right)^2 + 2s\left(\frac{x-a}{y-b}\right) + t \right]$$

și pentru că raportul $\frac{x-a}{y-b}$ poate lua orice valoare pozitivă sau negativă cînd $x \to a$, $y \to b$, în mod independent unul de altul, urmează că E păstrează un semn constant în vecinătatea lui (a, b) numai cînd realizantul $s^2 - rt < 0$; prin urmare, conform rezultatelor cunoscute de la discuția trinomului de gradul doi, avem:

1) $E > 0$, dacă $rt - s^2 > 0$, $r > 0$, cînd punctul (a, b) este un *punct de minim* pentru funcția $f(x, y)$ (fig. 106);

2) $E < 0$, dacă $rt - s^2 > 0$, $r < 0$, cînd punctul (a, b) este un *punct de maxim* pentru funcția $f(x, y)$, (fig. 107);

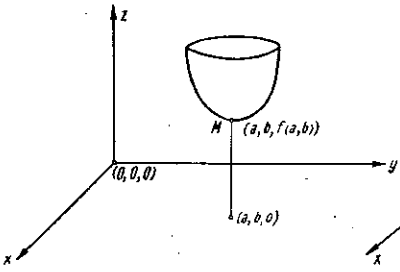


Fig. 106

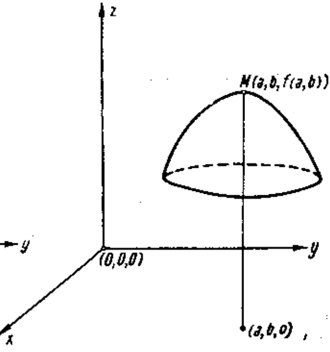


Fig. 107

3) Dacă $rt-s^2<0$, E nu păstrează un semn constant în vecinătatea punctului (a, b). În această situație, punctul (a, b) nu este punct de extremum pentru $f(x, y)$. Un astfel de punct se numește *punct șa* (fig. 108).

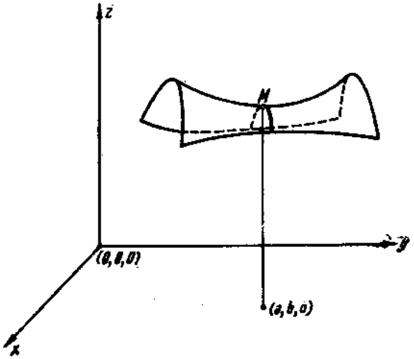


Fig. 108

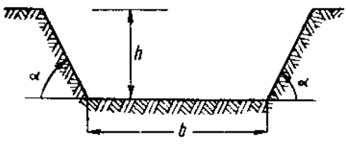


Fig. 109

Observații

1) Dacă $rt-s^2=0$, nu putem afirma despre punctul (a, b) dacă este sau nu punct de extremum pentru funcția $f(x, y)$. Într-adevăr, expresia E se mai poate scrie, cu $r \neq 0$,

$$E = \frac{1}{2r}(rt-s^2)(y-b)^2 +$$

$$+\frac{1}{2r}[s(y-b)+r(x-a)]^2.$$

Prin urmare, dacă $rt-s^2=0$, pentru $s(y-b)+r(x-a)=0$, $x \neq a$, $y \neq b$, $E=0$, deci semnul diferenței $f(x, y)-f(a, b)$ depinde de valorile derivatelor parțiale de ordin superior lui doi.

2) În teoremă condiția $r>0$ (sau $r<0$) se poate înlocui cu $t>0$ (sau $t<0$), după cum rezultă din demonstrație.

Exemple

1) Se cere dimensionarea unui canal avînd ca secțiune un trapez isoscel (fig. 109), cu secțiunea constantă a^2, în așa fel încît perimetrul udat să fie minim. Luăm ca variabile independente pe h și α. Avem

$$P(h, \alpha) = b + \frac{2h}{\sin\alpha},$$

cu $a^2 = (b + h\operatorname{ctg}\alpha)h$, $b = \frac{a^2}{h} - h\operatorname{ctg}\alpha$, și funcția de studiat rămîne

$$P(h, \alpha) = \frac{a^2}{h} + \frac{2h}{\sin\alpha} - h\operatorname{ctg}\alpha.$$

Avem

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \frac{2}{\sin\alpha} - \frac{a^2}{h^2} - \operatorname{ctg}\alpha = 0, \frac{\partial P}{\partial\alpha} = h\left(\frac{-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = 0,$$

și, cum $h \neq 0$, trebuie ca $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60°$, $h^2 = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$, $h = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}$.

Avem de asemenea

$$\frac{\partial^2 P}{\partial h^2} = \frac{2a^2}{h^3}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial h\, \partial \alpha} = \frac{1 - 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} = h\,\frac{2\sin^3\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\,(1-2\cos\alpha)}{\sin^4\alpha.}.$$

Pentru $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $h = a\, 3^{-\frac{1}{4}}$, avem

$$rt - s^2 = 8 > 0, \quad r = \frac{2a^2}{h^3} > 0,$$

deci un minim.

2) Să se construiască dintr-o cantitate de tablă dată o cisternă avînd forma unui paralelipiped drept, fără capac (fig. 110). Se cere să se găsească dimensiunile cisternei astfel încît capacitatea să fie maximă. Nu se ține seama de pierderea de material prin construcție.

Dacă x, y sînt dimensiunile bazei, z înălțimea, iar a^2 este suprafața de tablă pusă la dispoziție, avem

$$V = xyz, \quad a^2 = xy + 2xz + 2yz,$$

deci funcția, al cărei maxim trebuie găsit, este

$$V(x, y) = \frac{xy\,(a^2 - xy)}{2(x+y)}.$$

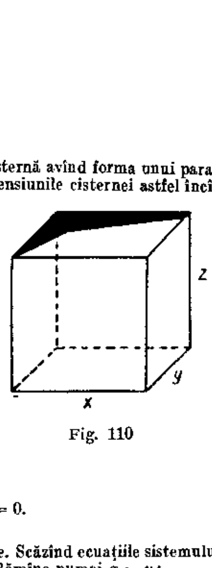


Fig. 110

Avem $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2\,(a^2 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2}$, $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2\,(a^2 - 2xy - y^2)}{2(x+)y}$.

Punctele staționare sînt soluțiile sistemului

$$y^2(a^2 - 2xy - x^2) = 0, \; x^2(a^2 - 2xy - y^2) = 0.$$

Soluția $x = 0$, $y = 0$ nu corespunde problemei tehnice puse. Scăzînd ecuațiile sistemului după ce înlăturăm pe x^2 și y^2, obținem $x^2 = y^2$, deci $x = \pm y$. Rămîne numai $x = y$;

$$a^2 - 3x^2 = 0, \quad a^2 - 3y^2 = 0,$$

deci

$$x = y = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ și } z = \frac{a}{3\sqrt{3}}.$$

Pentru aceste dimensiuni, avem un maxim, deoarece

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{a}{2\sqrt{3}}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{a}{2\sqrt{3}}, \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = -\frac{a}{4\sqrt{3}}$$

și

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{48}a^2 > 0, \; \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0.$$

2. Maxime și minime pentru funcții de p variabile

Definiție. Fie $f(x_1, x_2, ..., x_p)$ o funcție reală de p variabile, definită pe o mulțime $X \subset R^p$.

1) Un punct $(a_1, a_2, ... a_p) \in X$ se numește un punct de minim al funcției $f(x_1, x_2, ..., x_p)$ dacă există o vecinătate V a lui $(a_1, a_2, ..., a_p)$ astfel încît pentru orice $(x_1, x_2, ..., x_p) \in V \cap X$ să avem

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) \geqslant f(a_1, a_2, ..., a_p).$$

2) Un punct $(a_1 a_2 ..., a_p) \in X$ se numește un punct de maxim al funcției $f(x_1, x_2, ... x_p)$ dacă există o vecinătate V a lui $(a_1, a_2, ..., a_p)$ astfel încît pentru orice $(x_1 x_2, ..., x_p) \in V \cap X$ să avem

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) \leqslant f(a_1, a_2, ..., a_p).$$

Maximele sau minimele, așa cum sînt definite, sînt *maxime* sau *minime locale* sau *relative*. Se mai numesc și *extreme relative*.

Teoremă. Fie $f(x_1, x_2, ..., x_p)$ o funcție de p variabile definită pe o mulțime $X \subset R^p$ și $(a_1, a_2, ..., a_p)$ un punct interior lui X. Dacă:

1) funcția $f(x_1, x_2, ..., x_p)$ are în punctul $(a_1, a_2, ..., a_p)$ un extremum,

2) funcția $f(x_1, x_2, ..., x_p)$ are derivate parțiale în punctul $(a_1, a_2, ..., a_p)$, atunci derivatele parțiale se anulează în punctul $(a_1, a_2, ..., a_p)$, adică

$$f'_{x_1}(a_1, a_2, ..., a_p) = 0, \quad f'_{x_2}(a_1, a_2, ..., a_p) = 0, ...,$$
$$..., f'_{x_p}(a_1, a_2, ..., a_p) = 0.$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă luăm $x_1 = a_1, x_2 = a_2, ..., x_{k-1} = a_{k-1}, ..., x_{k+1} = a_{k+1}, ..., x_p = a_p$, funcția $f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_p)$ este derivabilă în punctul $x_k = a_k$ $(k = 1, 2, ..., p)$ și are în acest punct un extremum, deci, conform teoremei lui Fermat, $f'_{x_k}(a_1, a_2, ..., a_p) = 0$. Teorema este demonstrată.

Soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, ..., \ \frac{\partial f}{\partial x_p} = 0$$

formează mulțimea *punctelor staționare* ale funcției $f(x_1, x_2, ..., x_p)$.

Se observă că pe mulțimea punctelor staționare

$$df(x_1, x_2, ..., x_p) = 0$$

și reciproc, punctele care anulează diferențiala întîi sînt puncte staționare.

Punctele de extremum ale funcției $f(x_1, x_2, ..., x_p)$ se găsesc, așadar, printre punctele staționare ale ei.

Ca să putem recunoaște în punctele staționare unele puncte de extremum, trebuie să ținem seama de derivatele parțiale de ordinul doi.

T e o r e m ă. **Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ o funcție definită pe $X \subset R^p$, derivabilă parțial de trei ori pe X. Fie $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ o soluție a sistemului**

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_p} = 0.$$

1) Dacă toate numerele

$$\Delta_1 = A_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_p = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p1} & A_{p2} & \ldots & A_{pp} \end{vmatrix},$$

unde $A_{ij} = \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_p)}{\partial x_i \, \partial x_j}$, sînt pozitive, atunci funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ are în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un minim.

2) Dacă toate numerele

$$\Delta_1^* = -A_{11}, \ \Delta_2^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_p^* = (-1)^p \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p1} & A_{p2} & \ldots & A_{pp} \end{vmatrix}$$

sînt pozitive, atunci funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ are în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un maxim.

Nu dăm demonstrația acestei teoreme.

E x e m p l u

Să se studieze variația sumei pătratelor distanțelor unui punct variabil (x, y, z) din spațiu la m puncte fixe.

Dacă $P_k(a_k, b_k, c_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ sînt cele m puncte fixe, atunci funcția de studiat este

$$u(x, y, z) = \sum_{k=1}^{m} [(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 + (z - c_k)^2].$$

Punctele de extremum sînt date de sistemul

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \sum_{k=1}^{m} (x - a_k) = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=1}^{m} (y - b_k) = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = 2 \sum_{k=1}^{m} (z - c_k) = 0,$$

care admite soluția

$$x_0 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}, \ y_0 = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_m}{m}, \ z_0 = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}{m}.$$

Deoarece

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2,$$

iar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial x} = 0,$$

$$\Delta_1 = 2 > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Funcția $u(x, y, z)$ are în punctul (x_0, y_0, z_0) un minim.

Capitolul VII

FUNCȚII IMPLICITE

§ 1. FUNCȚII IMPLICITE DE UNA SAU MAI MULTE VARIABILE

1. Funcții implicite definite de ecuația $F(x, y) = 0$

D e f i n i ț i e. Fie ecuația $F(x,y) = 0$, unde $F(x,y)$ este o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime $X \subset R^2$. O funcție

$$y = f(x)$$

definită pe mulțimea $A \subset R$, astfel încît pentru orice $x \in A$, $(x, f(x)) \in X$ se numește soluție în raport cu y a ecuației $F(x,y) = 0$ pe mulțimea A dacă

$$F(x, f(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in A.$$

O ecuație $F(x, y) = 0$ poate să aibă pe A mai multe soluții sau nici una, după cum rezultă din următoarele exemple.

E x e m p l e

1) Ecuația $x^2 + y^2 - 1 = 0$ are în raport cu y o infinitate de soluții definite pe $[-1, +1]$ de

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \alpha \geqslant -1,\ \beta \leqslant 1 \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, +1] - [\alpha, \beta] \end{cases}$$

deoarece fiecare verifică ecuația $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Se observă că soluțiile nu sînt continue în punctul $x = \alpha$ sau $x = \beta$. Într-adevăr, pentru punctul $x = \alpha$ avem

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = \sqrt{1-\alpha^2}, \qquad \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = -\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Se verifică în mod asemănător și pentru β.

a) Dacă cerem soluției $f(x)$ *să fie continuă* pe domeniul de definiție, din mulțimea soluțiilor definite mai sus numai două sînt continue, și anume

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1, +1]$$

sau

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, +1].$$

b) Dacă cerem soluției $f(x)$ ca pe lingă continuitate să satisfacă și *condiția inițială* $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, numai soluția $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ îndeplinește această condiție. În concluzie, ecuația

$$x^2+y^2-1=0$$

are o singură soluție continuă pe $[-1,+1]$, care pentru $x=\frac{1}{2}$ ia valoarea $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Ecuația $x^4+y^4+1=0$, $(x, y)\in R^2$, nu are nici o soluție reală.

3) Ecuația $2x-3y+5=0$, $(x, y)\in R^2$, are o singură soluție,

$$f(x)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}x, \quad x\in R.$$

Definiție. **Funcțiile $y=f(x)$ definite cu ajutorul ecuațiilor $F(x,y)=0$ se numesc funcții implicite sau funcții definite implicit.**

În general, determinarea soluțiilor unei ecuații $F(x, y)=0$ nu se poate face sau nici nu este necesară. De exemplu, studiul conicelor definite de un polinom de gradul al doilea

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

se face pe această ecuație, sub formă implicită, deși explicitarea se realizează ușor.

Se pune problema studierii proprietăților soluțiilor ecuației $F(x, y)=0$ direct pe această ecuație, fără să fie nevoie de explicitarea lor. Teoremele care stabilesc astfel de proprietăți se numesc *teoreme de existență*.

După cum teoremele de existență conțin condiții mai mult sau mai puțin restrictive, rezultă pentru funcțiile definite de ecuația $F(x, y)=0$ proprietăți mai multe sau mai puține, așa cum s-a văzut la primul exemplu prezentat mai sus.

2. Teoremă de existență

Teorema I. **Fie $F(x,y)$ o funcție reală definită pe $X\times Y$, $X\subset R$, $Y\subset R$ și (x_0,y_0) un punct interior lui $X\times Y$, deci x_0 interior lui X și y_0 interior lui Y. Dacă:**

1) $F(x_0, y_0)=0$,

2) $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ **sînt continue pe o vecinătate $U\times V$ a lui** (x_0, y_0), $(U\times V\subset X\times Y)$,

3) $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$,

atunci

1') **există o vecinătate $U_0\subset U$ a lui x_0 și o vecinătate $V_0\subset V$ a lui y_0 și o funcție unică $y=f(x)$: $U_0\to V_0$, astfel încît**

$$f(x_0)=y_0 \text{ și } F(x, f(x))\equiv 0 \text{ pentru } x\in U_0;$$

2') **funcția $f(x)$ are derivata continuă pe U_0 dată de**

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)};$$

3′) Dacă $F(x,y)$ are derivatele parțiale de ordinul k continue pe $U\times V$, atunci $f(x)$ are derivata de ordinul k continuă pe U_0.

Demonstrație. *a*) Funcția $F'_y(x, y)$ este diferită de zero pentru (x_0, y_0) și continuă într-o vecinătate a lui (x_0, y_0), deci va fi diferită de zero într-o vecinătate a lui (x_0, y_0). Fie această vecinătate $U\times V$; prin urmare,

$$F'_y(x, y)\neq 0,\quad x\in U,\ y\in V.$$

Vom presupune $F'_y(x, y)>0, x\in U,\ y\in V$.

b) Funcția $F(x_0, y)$ de variabila reală y se anulează în punctul y_0, are derivata pozitivă pentru $y\in V_0\subset V$, deci este strict crescătoare pe V_0. Dacă notăm $V_0=(\alpha, \beta)$, atunci

$$F(x_0, \alpha)<0,\quad F(x_0, \beta)>0.$$

c) Funcția $F(x, \alpha)$ de variabila reală x este continuă în punctul x_0 și $F(x_0, \alpha)<0$, deci există o vecinătate U' a lui x_0 astfel încît, pentru orice $x\in U'$, $F(x, \alpha)<0$. Funcția $F(x, \beta)$ de variabila reală x este continuă în punctul x_0 și $F(x_0, \beta)>0$, deci există o vecinătate U'' a lui x_0 astfel încît, pentru orice $x\in U''$, $F(x, \beta)>0$. Dacă luăm $U_0=U'\cap U''$, atunci pentru orice $x\in U_0$

$$F(x, \alpha)<0,\ F(x, \beta)>0.$$

d) Fie acum x' oarecare $\in U_0$; $F(x, y)$ considerată funcție de y este strict crescătoare pe $[\alpha, \beta]$, continuă pe $[\alpha, \beta]$ și

$$F(x', \alpha)<0,\ F(x', \beta)>0,$$

deci există un singur punct $y'\in(\alpha, \beta)$ care verifică egalitatea

$$F(x', y')=0.$$

Deoarece x' a fost luat arbitrar în U_0, urmează că la orice $x\in U_0$ există un singur punct $y=f(x)\in V_0$ astfel încît $F(x, y)=0$. Punctul (1′) a fost astfel demonstrat.

e) Pentru (2′) observăm că dacă $x'=x_0$, $F(x_0, y_0)=0$, însă $y_0\in V_0$ și este deci singurul punct cu această proprietate.

Continuitatea funcției $f(x)$ pe U_0 rezultă din context. Într-adevăr, la vecinătatea V_0 (arbitrară) corespunde vecinătatea U_0, astfel încît pentru orice $x\in U_0$, $f(x)\in V_0$, care este tocmai definiția continuității funcției $f(x)$ în punctul x_0. Pentru orice $x'\in U_0$ condițiile teoremei sînt îndeplinite, deci funcția $f(x)$ este continuă pe U_0.

f) Fie $F(x, y)=0$ și $(a, b)\in U_0\times V_0$ astfel încît $F(a, b)=0$. Avem, conform formulei creșterilor finite,

$$0=F(x, y)-F(a, b)=F'_x(\xi, \eta)(x-a)+F'_y(\xi, \eta)(y-b),$$

unde $y=f(x)$, $b=f(a)$. Așadar, putem scrie

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\frac{F'_x(\xi, \eta)}{F'_y(\xi, \eta)},$$

deoarece, conform punctului 3 din teorema de existență, $F'_y(\xi, \eta)\neq 0$.

Derivatele parțiale F'_x, F'_y fiind continue, urmează că

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = -\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

O b s e r v a ț i e.

Dacă derivăm pe $F(x, y) = 0$, considerată ca funcție de două argumente x și $y = y(x)$, după regula stabilită la B., cap. VI, §5, al. 5, avem același rezultat

$$F'_x(x, y) + y' F'_y(x, y) = 0$$

sau

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

deoarece $F'_y(x, y) \neq 0$.

Observația făcută ne permite să calculăm derivatele de ordin superior după aceeași regulă. Anume

$$F''_{xx} + y' F''_{xy} + y'' F'_y + y' (F''_{xy} + F''_{yy} y') = 0,$$

deci

$$y'' = -\frac{F''_{xx} + 2y' F''_{xy} + y'^2 F''_{yy}}{F'_y},$$

însă $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$, astfel încît obținem în definitiv

$$y'' = -\frac{F'^2_y F''_{xx} - 2 F'_x F'_y F''_{xy} + F'^2_x F''_{yy}}{F'^3_y}.$$

y'' este continuă dacă F'_x, F'_y, F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} sînt continue și $F'_y \neq 0$. Prin inducție completă rezultă și punctul 3° al teoremei.

Aplicație

Ecuația $y = f(x)$ sau $y - f(x) = 0$ definește pe x ca funcție implicită de y în condițiile teoremei de existență. Avem $F'_y \equiv 1$, $F'_x = -f'(x)$, deci $x' = \frac{1}{f'(x)}$.

E x e m p l e

1) Ecuația $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) = 1$ definește pe y ca funcție de x

$$F'_y = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x + y}{x^2 + y^2} \neq 0 \text{ dacă } x + y \neq 0.$$

Să calculăm pe y' și y''. Avem

$$\left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = 0$$

sau

$$xy' - y + x + yy' = 0, \quad y' = \frac{y - x}{y + x}.$$

Mai derivăm o dată:

$$y' + xy'' - y' + 1 + y'^2 + yy'' = 0$$

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{x + y} \quad \text{sau} \quad y'' = -\frac{2x^2 + 2y^2}{(x + y)^3}.$$

2) Ecuaţia $f(x - y, x + y) = 0$ defineşte pe y ca funcţie de x pe $D \subset R^2$. Să se calculeze y'. Punem $u = x - y$, $v = x + y$. Avem

$$f'_u(1 - y') + f'_v(1 + y') = 0,$$

deci

$$y' = \frac{f'_u + f'_v}{f'_u - f'_v}$$

pentru mulţimea $(x, y) \in D$, pe care $f'_u - f'_v \neq 0$.

3. Interpretarea geometrică a derivatelor parţiale F'_x şi F'_y

Ecuaţia tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul (a, b) de pe curbă este

$$y - b = f'(a)(x - a).$$

Să presupunem acum că $y = f(x)$ este funcţia implicită definită de ecuaţia $F(x, y) = 0$. În această situaţie

$$f'(a) = -\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)},$$

deci ecuaţia tangentei se scrie

$$(x - a) F'_x(a, b) + (y - b) F'_y(a, b) = 0,$$

adică derivatele parţiale F'_x, F'_y în punctul (a, b) sînt parametrii directori ai tangentei în punctul (a, b) la curba definită de ecuaţia $F(x, y) = 0$.

Exemplu

Să găsim ecuaţia tangentei la elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

într-un punct (x_0, y_0) de pe elipsă. Coeficientul unghiular al tangentei în punctul (x_0, y_0) este

$$m = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

Ecuaţia tangentei este

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

sau

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 - (a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2) = 0.$$

Punctul fiind pe elipsa $a^2y_0^2 + b^2x_0^2 = a^2b^2$, ecuația tangentei se scrie

$$\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1,$$

adică se obține *prin dedublare.*

4. Funcții implicite definite de ecuația $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$

Definiție. **Fie ecuația $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, unde $F(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, y)$ este o funcție reală de $n + 1$ variabile definită pe o mulțime $X \subset R^{n+1}$. O funcție**

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

definită pe mulțimea $A \subset R^n$ este soluție în raport cu y a acestei ecuații pe mulțimea A dacă pentru $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ avem

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \equiv 0.$$

Exemple

1) Ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

definește pe z ca funcție de x și y. Ecuația are o infinitate de soluții pe $D \subset R^2$ definit de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 \leqslant 0$. Dacă A_1 și A_2 sînt două mulțimi astfel încît $A_1 \cup A_2 = D$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (fig. 111),

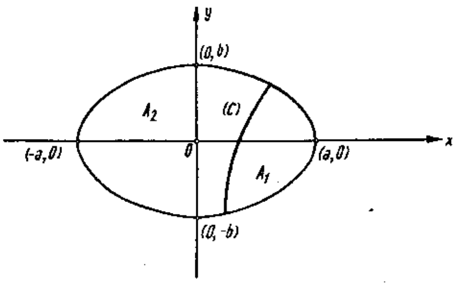


Fig 111

atunci soluțiile căutate sînt

$$f(x, y) = \begin{cases} c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}, & (x, y) \in A_1, \\ -c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}, & (x, y) \in A_2, \end{cases}$$

soluții care nu sînt continue pe mulțimea (C), frontiera comună a celor două mulțimi.

Ecuația are numai două soluții continue, și anume

$$f_1(x) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,,\ (x, y) \in D,$$

și

$$f_2(x) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,,\ (x, y) \in D.$$

2) Ecuația $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ nu are nici o soluție reală.

Funcțiile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definite cu ajutorul ecuației $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ se numesc funcții implicite sau funcții definite implicit.

5. Teorema de existență

Teorema II. **Fie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ o funcție reală definită pe $X \times Y$, $X \subset R^n$, $Y \subset R$, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ un punct interior lui X și y_0 un punct interior lui Y. Dacă**

1) $F(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, y_0) = 0$;

2) funcția $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ este continuă împreună cu derivatele parțiale $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \ldots, F'_{x_n}, F'_y$ pe o vecinătate $U \times V$ a punctului $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, y_0)$, $(U \subset X,\ V \subset Y)$;

3) $F'_y(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, y_0) \neq 0$,

atunci

1') există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui $(x_{10}, \ldots, x_{n0})$, o vecinătate $V_0 \subset V$ a lui y_0 și o funcție unică

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n):\ U_0 \to V_0$$

astfel încît

$$f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = y_0$$

și

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0;$$

2') funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are derivate parțiale continue în raport cu x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pe U_0, date de

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, y)},\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

3') dacă $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ are derivate parțiale de ordinul k continue pe $U \times V$, atunci funcția implicită $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are derivate parțiale de ordinul k continue pe U_0.

Demonstrație. Dacă considerăm variabila vectorială $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, atunci $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ se scrie ca o funcție reală $F(x, y)$ de două variabile x, y, una vectorială x și a doua scalară y. Cu această notație, demonstrația de la teorema precedentă se transcrie punct cu punct la această situație. Într-adevăr :

a) Funcția $F'_y(x, y)$ este diferită de zero pentru (x_0, y_0), unde $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, și continuă într-o vecinătate a lui (x_0, y_0), deci va fi diferită de zero într-o vecinătate a lui (x_0, y_0). Fie această vecinătate $U \times V$; prin urmare, $F'_y(x, y) \neq 0$, $x \in U$, $y \in V$. Vom presupune $F'_y(x, y) > 0$.

b) Funcția $F(x_0, y)$ de variabilă reală y se anulează în punctul y_0, are derivata pozitivă pentru $y_0 \in V_0 \subset V$, deci este strict crescătoare pe V_0.

Dacă notăm $V_0 = (\alpha, \beta)$, atunci $F(x_0, \alpha) < 0$, $F(x_0, \beta) > 0$.

c) Funcția reală $F(x, \alpha)$ de variabilă x este continuă în punctul x_0 și $F(x_0, \alpha) < 0$, deci există o vecinătate U' a lui x_0 astfel încît pentru orice $x \in U'$, $F(x, \alpha) < 0$.

Funcția reală $F(x, \beta)$ de variabilă x este continuă în punctul x_0 și $F(x_0, \beta) > 0$, deci există o vecinătate U'' a lui x_0 astfel încît, pentru orice $x \in U''$, $F(x, \beta) > 0$. Dacă luăm $U_0 = U' \cap U''$, atunci pentru orice $x \in U_0$, $F(x, \alpha) < 0$, $F(x, \beta) > 0$.

d) Fie acum x' oarecare din U_0; $F(x, y)$ considerată funcție de y este strict crescătoare pe $[\alpha, \beta]$, continuă pe $[\alpha, \beta]$ și $F(x', \alpha) < 0$, $F(x', \beta) > 0$, deci există un singur punct $y' \in (\alpha, \beta)$ care verifică egalitatea $F(x', y') = 0$. Deoarece x' a fost luat arbitrar în U_0, urmează că la orice $x \in U_0$ există un singur punct $y = f(x) \in V_0$ astfel încît $F(x, y) = 0$. Punctul 1' este demonstrat.

e) Pentru 2' observăm că, dacă $x = x_0$, $F(x_0, y_0) = 0$, însă $y_0 \in V_0$, deci este singurul punct cu această proprietate.

Continuitatea funcției $f(x)$ pe U_0 rezultă din cele de mai sus. Într-adevăr, la vecinătatea V_0 (arbitrară) corespunde vecinătatea U_0 astfel încît, pentru orice $x \in U_0$, $f(x) \in V_0$. Pentru orice $x' \in U_0$, condițiile teoremei sînt îndeplinite, deci funcția $f(x)$ este continuă pe U_0.

f) Fie $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, y) \in U_0 \times V_0$ și $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) \in U_0 \times V_0$ astfel încît

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, y) = 0$$
$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) = 0.$$

Aplicînd formula creșterilor finite, avem

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, y) - F(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) = \\ = F'_{x_k}(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \xi_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, \eta)(x_k - a_k) + \\ + F'_y(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \xi_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, \eta)(y - b) = 0, \end{aligned}$$

unde

$$y = f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$
$$b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

și, pentru că $F'_y \neq 0$, avem, împărțind cu $x_k - a_k$ și trecînd la limită,

$$F'_{x_k} + \frac{\partial y}{\partial x_k} F'_y = 0, \tag{1}$$

deci

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = - \frac{F'_{x_k}}{F'_y},$$

adică aceeași lege de derivare stabilită și la aliniatul precedent.

Derivatele de ordin superior se calculează în mod asemănător. Derivata $\frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_h}$ se obține derivînd pe (1) încă o dată în raport cu x_h. Avem

$$F''_{x_k x_h} + F''_{x_k y} \frac{\partial y}{\partial x_h} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_h} F'_y + \frac{\partial y}{\partial x_k}\left(F''_{x_h y} + F''_{yy} \frac{\partial y}{\partial x_h}\right) = 0. \tag{2}$$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x_h \partial x_k}$ este continuă dacă F'_y, F'_{x_h}, F'_{x_k}, $F''_{x_h x_k}$, $F''_{x_k y}$, $F''_{x_h y}$, F''_{yy} sînt continue și dacă $F''_y \neq 0$. Din (2) avem

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_h \partial x_k} = - \frac{F''_{x_h x_k} + \frac{\partial y}{\partial x_h} F''_{x_k y} + \frac{\partial y}{\partial x_k} F''_{x_h y} + \frac{\partial y}{\partial x_h} \frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot F''_{yy}}{F'_y}$$

și, pentru că

$$\frac{\partial y}{\partial x_h} = - \frac{F'_{x_h}}{F'_y}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_k} = - \frac{F'_{x_k}}{F'_y},$$

avem

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_h \partial x_k} = - \frac{F'^2_y F''_{x_h x_k} - F'_y F'_{x_h} F''_{x_k y} - F'_y F'_{x_k} F''_{x_h y} + F'_{x_h} F'_{x_k} F''_{yy}}{F'^3_y}.$$

Prin inducție completă rezultă și punctul 3′ din teoremă.

Exemple

1) Funcția $e^{x^2+y^2+z^2} + xy + yz + zx = 1$ definește pe z ca funcție de x și y. Avem, derivînd în raport cu x și ținînd seama că z este funcție de x și y,

$$\left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}\right) e^{x^2+y^2+z^2} + y\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + z + \frac{\partial z}{\partial x} x = 0,$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{2xe^{x^2+y^2+z^2} + y + z}{2ze^{x^2+y^2+z^2} + y + x}.$$

În mod asemănător avem și

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{2y\, e^{x^2+y^2+z^2} + x + z}{2ze^{x^2+y^2+z^2} + y + z}.$$

Funcţia z şi derivatele ei parţiale există în tot planul, cu excepţia punctelor pentru care $2ze^{x^2+y^2+z^2} + y + z = 0$.

2) Funcţia $F(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 + x^2) = 0$ defineşte pe z ca funcţie de x şi y. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$. Punem $u = x^2 - y^2$, $v = y^2 - z^2$, $w = z^2 + x^2$. Avem, derivînd în raport cu x şi ţinînd seama că z este funcţie de x şi y,

$$\frac{\partial F}{\partial u} 2x + \frac{\partial F}{\partial v}\left(-2z \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial w}\left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial F}{\partial v}}.$$

În mod analog, derivînd în raport cu y, avem

$$\frac{\partial F}{\partial u}(-2y) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(2y - 2z \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial w}\left(2z \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial F}{\partial v}};$$

derivatele parţiale există în tot planul, cu excepţia punctelor pentru care

$$z\left(\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) = 0.$$

6. Interpretarea geometrică a derivatelor parţiale ale unei funcţii $F(x, y, z)$

Ecuaţia planului tangent la suprafaţa $z = f(x, y)$ în punctul $(a\ b, c)$ de pe suprafaţă este

$$z - c = \frac{\partial z(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial z(a, b)}{\partial y}(y - b).$$

Să presupunem acum că $z = f(x, y)$ este funcţia implicită definită de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$. În această situaţie avem

$$\frac{\partial z(a, b)}{\partial x} = -\frac{F'_x(a, b, c)}{F'_z(a, b, c)}, \quad \frac{\partial z(a, b)}{\partial y} = -\frac{F'_y(a, b, c)}{F'_z(a, b, c)},$$

deci ecuaţia planului tangent se scrie

$$(x - a)F'_x(a, b, c) + (y - b)F'_y(a, b, c) + (z - c)F'_z(a, b, c) = 0,$$

adică derivatele parţiale F'_x, F'_y, F'_z în punctul (a, b, c) sînt parametrii directori ai normalei în punctul (a, b, c) la suprafaţa definită de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$.

Dacă în punctul (a, b, c), $F'_x(a, b, c) = 0$, $F'_y(a, b, c) = 0$, $F'_z(a, b, c) = 0$, suprafaţa nu are plan tangent. Punctul (a, b, c) se numeşte *punct conic*. Un astfel de punct, de exemplu, este vîrful unui con.

Exemplu

Ecuaţia planului tangent la elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

în punctul x_0, y_0, z_0 de pe elipsoid. Avem

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{2x_0}{a^2},\ F'_y(x_0, y_0, z_0) = \frac{2y_0}{b^2},\ F'(x_0, y_0, z_0) = \frac{2z_0}{c^2}.$$

Planul tangent are ecuaţia

$$(x - x_0)\frac{x_0}{a^2} + (y - y_0)\frac{y_0}{b^2} + (z - z_0)\frac{z_0}{c^2} = 0$$

sau

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Punctul (x_0, y_0, z_0) se găseşte pe elipsoid, deci

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

astfel încît obţinem forma definitivă

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1,$$

care se obţine tot prin dedublare.

§ 2. SISTEME DE FUNCŢII IMPLICITE

1. Definiţii.

a) Un sistem de m ecuaţii

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

unde $F_k(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m)$, $k = 1,2,\dots, m$, sînt m funcții reale de $n + m$ variabile $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$, definite pe o mulțime $X \times Y$, $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$, se numește sistem de m funcții implicite.

b) Un sistem de m funcții reale

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2}$$

de n variabile $x_1, x_2, \dots, x_n$, definite pe o mulțime $A \subset X \subset R^n$, este o soluție a sistemului de ecuații (1) în raport cu variabilele $y_1, y_2, \dots, y_m$ pe mulțimea A dacă înlocuind pe y_i în sistem îl verifică identic:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0 \\ &F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_m(x_1, x_2, \dots, x_n; f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0 \end{aligned}$$

Exemplu

Funcțiile $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z^2$, definesc pe y și z ca funcții de x pentru $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Sistemul are o infinitate de soluții

$$\begin{aligned} y(x) &= \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}, \\ z(x) &= \varepsilon' \sqrt{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \qquad x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha\right],$$

sau

$$\begin{aligned} y(x) &= -\varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}, \\ z(x) &= -\varepsilon' \sqrt{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \qquad x \in \left[\alpha, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

cu ε, $\varepsilon' = +1$ sau -1.

Dintre acestea numai patru sînt continue, și anume

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}, \quad z_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y_2(x) &= -\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}, \quad z_2(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y_3(x) &= \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}, \quad z_3(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y_4(x) &= -\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}, \quad z_4(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{aligned}$$

Dacă căutăm soluţia continuă care trece prin punctul $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, această soluţie $y = \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ este unică.

2. Teorema de existenţă pentru sisteme de funcţii implicite

Teorema. III. Fie un sistem de m funcţii reale de $n + m$ variabile

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

definit pe $X \times Y$, $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$ şi $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{m0})$ un punct interior lui $X \times Y$, adică $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ interior mulţimii $X \subset R^n$ şi $y_0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{m0})$ interior mulţimii $Y \subset R^m$.

Dacă

1) $F_i(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{m0}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$;

2) funcţiile reale F_i $(i=1,2,\ldots,m)$ au derivatele parţiale $\frac{\partial F_i}{\partial x_h}$, $h=1, 2, \ldots, n$, $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ continue într-o vecinătate $U \times V$ a punctului $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{m0})$;

3) determinantul următor

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix},$$

numit determinantul funcţional sau iacobianul funcţiilor $F_1, F_2, \ldots, F_m$ în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_m$, este diferit de zero în punctul $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{m0})$, atunci

1′) există o vecinătate $U_0 \times V_0$ a punctului $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0};\ y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{m0})$ cu $U_0 \subset U \subset R^n$, $V_0 \subset V \subset R^m$ și un sistem de m funcții reale de n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $U_0 \to V_0$,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

astfel încît

$$y_{i0} = f_i(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

și care verifică identic sistemul (1)

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \equiv 0;\quad i = 1,2,\ldots, m$$

2′) funcțiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ au derivate parțiale continue pe U_0 date de

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_i} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial x_i} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

3′) dacă funcțiile $F_1, F_2, \ldots, F_m$ au derivate parțiale de ordinul k continue pe $U \times V$, atunci funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ au derivate parțiale de ordinul k continue pe U_0.

Demonstrație. Vom demonstra teorema de mai sus pentru $m = 3$, adică pentru sistemul

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, y_3) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, y_3) &= 0 \\ F_3(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, y_3) &= 0, \end{aligned} \tag{1'}$$

prin inducție completă. Teorema a fost demonstrată pentru o singură ecuație (teorema II de la aliniatul precedent). Presupunem teorema adevărată pentru $m - 1 = 2$ și să arătăm că este adevărată și pentru $m = 3$.

a) Determinantul funcțional

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0$$

este diferit de zero în punctul $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; y_{10}, y_{20}, y_{30})$, deci cel puțin unul din minorii de ordinul 2 este diferit de zero, fie acesta

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0$$

b) Dacă considerăm sistemul format numai de ecuațiile $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, teorema de existență fiind adevărată pentru $m = 2$, într-o vecinătate $U_0 \times V_0$ a punctului M_0 avem

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_3) \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_3) \end{aligned} \tag{2}$$

astfel încît

$$y_{10} = \varphi_1(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; y_{30}), \ y_{20} = \varphi_2(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; y_{30}),$$

soluții care verifică identic cele două ecuații

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n; y_3), \varphi_2(x_1, \ldots, x_n; y_3), y_3) \equiv 0$$
$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n; y_3), \varphi_2(x_1, \ldots, x_n; y_3), y_3) \equiv 0$$

c) Dacă înlocuim pe (2) în ultima ecuație din sistemul (1′), avem

$$F_3(x_1, x_2, \ldots, x_n; \varphi_1, \varphi_2, y_3) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_3) = 0, \tag{3}$$

ecuație care conține numai pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și pe y_3. Conform teoremei de existență de la aliniatul precedent, pentru a putea fi rezolvată în raport cu y_3 trebuie ca $\Phi'_{y_3} \neq 0$. Avem

$$\Phi'_{y_3} = \frac{\partial F_3}{\partial y_3} + \frac{\partial F_3}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_3} + \frac{\partial F_3}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y_3}.$$

Derivatele $\frac{\partial y_1}{\partial y_3}, \frac{\partial y_2}{\partial y_3}$ le obținem din ecuațiile

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, y_3) = 0$$
$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, y_3) = 0,$$

și anume derivăm în raport cu y_3 și ținem seama de (2)

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_3} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y_3} + \frac{\partial F_1}{\partial y_3} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_3} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y_3} + \frac{\partial F_2}{\partial y_3} = 0,$$

ecuații care au soluțiile

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_3} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_3} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial y_3} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

pe care dacă le înlocuim în Φ'_{y_3} obținem

$$\Phi'_{y_3} = \frac{\partial F_3}{\partial y_3} - \frac{\partial F_3}{\partial y_1} \cdot \frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_3, y_2)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}} - \frac{\partial F_3}{\partial y_2} \cdot \frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_3)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}},$$

deci

$$\Phi'_{y_3} = \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} : \frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)} \neq 0.$$

Conform teoremei II de existență, demonstrată la aliniatul precedent, din (3) rezultă pentru $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U_0$

$$y_3 = f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4}$$

care verifică condiția $y_{30} = f_3(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ și care verifică identic ecuația (3) pentru $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U_0$.

d) Înlocuind pe (4) în (2), obținem, așadar, sistemul de soluții

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

care verifică condițiile de la punctul 1′ ale teoremei enunțate.

e) Înlocuind în sistemul (1′), avem identitățile $(x \in U_0)$

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; f_1, f_2, f_3) &\equiv 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; f_1, f_2, f_3) &\equiv 0 \\ F_3(x_1, x_2, \ldots, x_n; f_1, f_2, f_3) &\equiv 0, \end{aligned} \tag{5}$$

din care, prin derivare în raport cu x_i, obținem

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial f_3}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x_i}\equiv 0\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x_i}+\frac{\partial F_2}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_2}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\frac{\partial F_2}{\partial f_3}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x_i}\equiv 0\\
&\frac{\partial F_3}{\partial x_i}+\frac{\partial F_3}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_3}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\frac{\partial F_3}{\partial f_3}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x_i}\equiv 0
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

(6) poate fi considerat un sistem liniar în necunoscutele $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_i}$, cu determinantul sistemului determinantul funcțional al funcțiilor F_1, F_2, F_3 în raport cu variabilele y_1, y_2, y_3, prin ipoteză diferit de zero. După regula lui Cramer, avem

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}=-\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x_i, y_2, y_3)}:\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_i}=-\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y_1, x_i, y_3)}:\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_i}=-\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y_1, y_2, x_i)}:\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y_1, y_2, y_3)},\quad i=1, 2, \ldots, n,$$

deci punctul 2′ al teoremei este demonstrat.

Pentru punctul 3′ observăm că derivatele $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$ conțin derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcțiilor F_m, care sînt derivabile continuu de k ori, deci $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$ sînt derivabile continuu de $k-1$ ori. Prin urmare, derivatele parțiale de ordinul doi ale funcțiilor f_m există și sînt continue ș.a.m.d. Prin inducție rezultă punctul 3′. Teorema este demonstrată.

Exemplu

Sistemul

$$x+y+u^2+v^2=1$$
$$x^2+y^2+u^4-v^4=2$$

definește pe u și v ca funcție de x și y. Avem, derivînd parțial în raport cu x, ecuațiile sistemului

$$1+2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$x+2u^3\frac{\partial u}{\partial x}-2v^3\frac{\partial v}{\partial x}=0;$$

deci pentru punctele $(x, y) \in R^2$, pentru care

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u^3 & -v^3 \end{vmatrix} = -uv(u^2+v^2) \neq 0,$$

avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2v \\ x & -2v^3 \end{vmatrix}}{4uv(u^2+v^2)} = \frac{-v^2-x}{2u(u^2+v^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 2u^3 & x \end{vmatrix}}{4uv(u^2+v^2)} = \frac{x-u^2}{2v(u^2+v^2)}$$

În mod asemănător, derivînd parțial în raport cu y ecuațiile sistemului, obținem

$$1 + 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$y + 2u^3\frac{\partial u}{\partial y} - 2v^3\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

și pentru $uv(u^2+v^2) \neq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-v^2-y}{2u(u^2+v^2)}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y-u^2}{2v(u^2+v^2)}.$$

§ 3. DEPENDENȚA FUNCȚIONALĂ

1. Funcții de mai multe variabile în dependența funcțională

Definiție. Fie

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

m funcții reale definite pe o mulțime $X \subset R^n$. O funcție reală $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită de X depinde de funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ pe mulțimea X, dacă există o funcție reală de m variabile $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ definită pe o mulțime $Y \subset R^m$ astfel încît pentru $x \in X$ să avem identic

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \Phi[f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Exemplu

Fie funcțiile $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $h(x, y, z) = xy + yz + zx$, definite pe R^3. Avem

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx),$$

deci

$$g \equiv f^2 - 2h.$$

Funcția g depinde de funcțiile f și h pe R^3.

Definiție. Funcțiile reale

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

definite pe o mulțime $X \subset R^n$ sînt în dependență funcțională pe o mulțime $A \subset X$ dacă cel puțin una din ele depinde de celelalte pe mulțimea A.

Exemplu

Fie funcțiile $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ definite pe R.
Pentru orice $x \in R$, avem $g(x) = f^2(x)$, deci g este funcție de f pe R.
Pentru orice $x \in [0, +\infty]$ avem $f(x) = \sqrt{g(x)}$, deci f este funcție de g pe $[0, +\infty]$.

Teoremă. Condiția necesară și suficientă pentru ca n funcții de n variabile independente

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

definite pe o mulțime $X \subset R^n$, cu derivate parțiale continue pe X, să fie în dependență funcțională pe mulțimea $A \subset X$ este ca determinantul funcțional

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

să fie identic nul pe A.

Demonstrație. Vom demonstra teorema pentru cazul a trei funcții

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \tag{1}$$

a) Să presupunem că între funcțiile y_1, y_2, y_3 avem legătura

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = 0, \tag{2}$$

independentă de $(x_1, x_2, x_3) \in A$ și neidentic nulă în y_1, y_2, y_3.

Diferențiind în (2), avem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} dy_3 = 0, \tag{3}$$

însă din (1) obținem

$$dy_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3$$

$$dy_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3$$

$$dy_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3,$$

care înlocuite în (3) și regrupate după dx_1, dx_2, dx_3 ne dau

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) dx_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) dx_3 = 0,$$

relație care trebuie să fie adevărată oricare ar fi dx_1, dx_2, dx_3 și care conduce, în baza acestei observații, la sistemul omogen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0,$$

în care necunoscutele sînt $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}$. Asupra relației $\Phi(y_1, y_2, y_3) = 0$ am

făcut ipoteza că nu este identic nulă în y_1, y_2, y_3, deci $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}$ nu trebuie să fie simultan nule, ceea ce, conform teoremei lui Rouché, conduce la condiția

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in A$, adică determinantul funcțional trebuie să fie identic nul pe A.

b) Să arătăm acum că dacă determinantul funcțional $\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}$ este identic nul pe A există cel puțin o legătură între y_1, y_2, y_3 pe A.

Vom considera trei cazuri:

1) Cel puțin unul dintre determinanții minori de ordinul doi al determinantului funcțional nu este identic nul pe A. Fie deci

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \not\equiv 0, \qquad (x_1, x_2, x_3) \in A.$$

Conform teoremei III de existență (B., cap. VII, § 2 al. 2), din primele două ecuații (1) putem scoate pe x_1 și x_2 funcții de y_1, y_2, x_3, și anume

$$x_1 = \theta_1 (y_1, y_2, x_3), \qquad x_2 = \theta_2 (y_1, y_2, x_3),$$

și, înlocuindu-le în ultima ecuație din (1), obținem

$$y_3 = \Psi (y_1, y_2, x_3) = f (\theta_1 (y_1, y_2, x_3), \theta_2 (y_1, y_2, x_3), x_3).$$

Însă derivata lui Ψ în raport cu x_3, ce se obține din această relație, este (B., cap. VII, § 2 al. 2) dată de

$$\Psi'_{x_3} = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2 x_3)} : \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)}$$

și este nulă în fiecare punct al mulțimii A, deoarece prin ipoteză $\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \equiv 0$, $\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \not\equiv 0$ pe A. Acest fapt arată că Ψ nu depinde de x_3 pe A; prin urmare,

$$y_3 = \Psi (y_1, y_2),$$

adică y_1, y_2, y_3 sînt în dependență funcțională pe A.

2) Să presupunem acum că toți minorii de ordinul doi ai determinantului funcțional sînt identic nuli pe A și cel puțin unul din minorii de ordinul întîi este diferit de zero

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \neq 0.$$

În această situație, determinantul funcțional are liniile proporționale

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial y_2}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial y_3}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

ceea ce este echivalent cu

$$dy_1 = \lambda dy_2, \quad dy_1 = \mu dy_3.$$

Să revenim acum la ipoteza că $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \not\equiv 0$.

În virtutea teoremei I de existență (B., cap. VII, §1 al. 2) putem explicita pe x_1, din ecuația $y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$, în funcție de y_1, x_2, x_3. Să înlocuim pe x_1, astfel obținut, în celelalte două ecuații rămase, care devin astfel funcții de x_2, x_3 și y_1

$$\begin{aligned} y_2 &= \Psi_2(x_2, x_3, y_1) \\ y_3 &= \Psi_3(x_2, x_3, y_1), \end{aligned} \tag{2}$$

pe care dacă le diferențiem obținem

$$dy_2 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_1} dy_1$$

$$dy_3 = \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y_1} dy_1.$$

Însă trebuie să avem

$$dy_2 = \frac{1}{\lambda} dy_1, \quad dy_3 = \frac{1}{\mu} dy_1,$$

ceea ce implică

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} = 0$$

și

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_3} = 0$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in A$.

Relațiile (2) se transformă în

$$y_2 = \Psi_2(y_1), \quad y_3 = \Psi_3(y_1),$$

adică între y_1, y_2, y_3 există două relații independente de x_1, x_2, x_3 pe A.

3) Mai putem face ipoteza ca toate elementele determinantului funcțional $\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}$ să fie nule. În această situație, $dy_1 = dy_2 = dy_3 = 0$, iar y_1, y_2, y_3 sînt constante.

Exemple

1) Funcțiile

$$y_1 = u^2 + v^2 - w, \quad y_2 = u^2 - v^2, \quad y_3 = 4u^2 v^2 - 2w(u^2 + v^2) + w^2$$

definite pe R^3 sînt în dependență funcțională pe R^3.
Într-adevăr

$$\frac{D(y_1 y_2, y_3)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 2u & 2v & -1 \\ 2u & -2v & 0 \\ 8uv^2 - 4uw & 8vu^2 - 4vw & -2(u^2 + v^2) + 2w \end{vmatrix} =$$

$$= -8uvw + 8uv(u^2 + v^2) - 8uv(2u^2 - w) - 8uv(2v^2 - w) + 8uv(u^2 + v^2) - 8uwv \equiv 0.$$

2) Să se arate că o funcție omogenă de grad zero in x și y este de forma $f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Dacă $z_1 = \frac{y}{x}$ și $z_2 = f(x, y)$ sînt în dependență funcțională, atunci iacobianul lor este nul

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\frac{1}{x^2}(xf'_x + yf'_y) = 0.$$

Însă o funcție omogenă de grad zero verifică relația lui Euler

$$xf'_x + yf'_y = 0.$$

Prin urmare $f(x, y)$ este de forma $f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Definiție. **Funcțiile $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definite pe o mulțime $X \subset R^n$ se spune că sînt independente într-un punct $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in X$ dacă nici una din funcții nu depinde de celelalte într-o vecinătate a lui $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$.**

Funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt independente pe X dacă sînt independente în orice punct interior al lui X.

Cu această definiție, avem următoarea consecință a teoremei precedente.

Consecință. **Fie funcțiile $f_1 f_2, \ldots, f_n$, definite pe o mulțime $X \subset R^n$, cu derivate parțiale continue într-un punct $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ interior mulțimii X. Dacă determinantul funcțional**

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

este diferit de zero în punctul $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, atunci funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt independente în acest punct.

Demonstrație. Determinantul funcțional

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

este o funcţie continuă în punctul $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, deoarece toate elementele sale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sînt continue în punctul x_0.

Determinantul funcţional fiind diferit de zero în puncul $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, există o vecinătate V în care nu se anulează, prin urmare, în V funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nu sînt în dependenţă funcţională.

§ 4. MAXIME ŞI MINIME PENTRU FUNCŢII DEFINITE IMPLICIT

1. Maxime şi minime pentru funcţii supuse la legături

Fie $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie reală definită pe o mulţime $X \subset R^n$ şi un sistem de $p < n$ ecuaţii

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

funcţiile reale $F_1, F_2, \ldots, F_p$ fiind definite pe aceeaşi mulţime $X \subset R^n$.

Extremele funcţiei $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cînd punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ parcurge numai mulţimea A a soluţiilor sistemului (1) se numesc *extremele* funcţiei f *condiţionate* de sistemul (1) sau *extremele* funcţiei f *supuse la legăturile* (1).

Punctele staţionare ale funcţiei $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cînd punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ parcurge numai mulţimea A a soluţiilor sistemului (1) se numesc *punctele staţionare legate* sau *punctele staţionare condiţionate* ale funcţiei f.

Punctele de extremum condiţionat sau punctele staţionare condiţionate se definesc în mod asemănător ca punctele extreme sau punctele staţionare obişnuite (sau libere), cu condiţia ca punctele respective să aparţină mulţimii A. În cele ce urmează presupunem funcţiile $F_1, F_2, \ldots, F_p$ independente şi derivabile pe X, cu determinantul funcţional, de exemplu

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)} \neq 0, \quad \text{pe } X.$$

T e o r e m ă. Fie funcţia $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ de $n + p$ variabile definită de

$$\Phi = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_p F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

şi $(a_1, a_2, \ldots, a_n; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p)$ un punct staţionar liber al funcţiei Φ. Punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este punct staţionar al funcţiei $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu legăturile $F_1 = 0; F_2 = 0, \ldots, F_p = 0$.

Demonstrație. Funcțiile $f, F_1, F_2, \ldots, F_p$ sînt presupuse derivabile pe X;

a) Punctele staționare ale funcției $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sînt punctele pentru care $dy = 0$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0. \tag{2}$$

Deoarece căutăm soluțiile ecuației (2) pe mulțimea A a soluțiilor sistemului (1), pentru care sistemul (1) este *identic nul*, urmează că avem pe A și

$$dF = 0, \quad dF_2 = 0, \ldots, dF_p = 0;$$

prin urmare, dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sînt p numere *oarecare*, punctele staționare ale funcției f cu legăturile (1) sînt soluțiile ecuației

$$df + \lambda_1 dF_1 + \lambda_2 dF_2 + \ldots + \lambda_p dF_p = 0; \tag{3}$$

oricare ar fi $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

Relația (3) se scrie

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_1}\right) dx_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_2}\right) dx_2 + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_n}\right) dx_n = 0. \end{aligned} \tag{3'}$$

b) Sistemul de funcții implicite $F_1 = 0,\ F_2 = 0, \ldots, F_p = 0$, determină pe $x_1, x_2, \ldots, x_p$ funcții de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, deci diferențialele $dx_1, dx_2, \ldots, dx_p$ se exprimă cu ajutorul diferențialelor $dx_{p+1}, \ldots, dx_n$, care sînt singurele independente, deci nu putem proceda ca la extremele libere, și anume să anulăm coeficienții lui $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, fără o prealabilă justificare.

c) Să considerăm sistemul de n ecuații

$$\begin{aligned} &F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0, \ldots, F_p = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{p+1}} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_{p+1}} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_n} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soluțiile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vor fi funcții

de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, arbitrare. Dacă înlocuim pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel determinați în sistemul de p ecuații

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_1} = 0 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{\partial f}{\partial x_p} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_p} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_p} = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

obținem p ecuații în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, care rezolvate ne dau soluția (sau soluțiile) $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Dacă le înlocuim în expresiile lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$, determinăm astfel sisteme de soluții $(a_1, a_2, \ldots, a_n; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p)$ care verifică sistemul

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0, \ldots, F_p = 0$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} = 0 \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

d) Din raționamentul de mai sus rezultă că punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un punct staționar legat al funcției f, deoarece verifică sistemul $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots, F_p = 0$ și $df = 0$.

e) Se observă că sistemul (4) + (5) se formează anulînd toate derivatele parțiale ale funcției $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$

$$\Phi = f_1 + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_p F_p,$$

considerată ca funcția de $n + p$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, deci soluția $(a_1, a_2, \ldots, a_n; \mu_1, \ldots, \mu_p)$ a sistemului (4) + (5) este un punct staționar (liber) al funcției Φ definită pe R^{n+p}.

Teorema este astfel demonstrată.

Observație

Punctele de extremum legat al funcției $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots, F_p = 0$, se găsesc printre punctele staționare legate ale funcției $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, deci printre punctele staționare ale funcției de $n + p$ variabile

$$\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_p F_p.$$

Numerele $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ se numesc multiplicatorii lui Lagrange, iar metoda folosită mai sus pentru determinarea extremelor legate se numește *metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

În rezumat, pentru aflarea punctelor în care funcția

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

cu legăturile

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots, F_p(x_1 x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

poate avea un extremum (condiţionat), se procedează în modul următor:

1) Se formează funcţia ajutătoare

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_p F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ parametri.

2) Se anulează derivatele parţiale în număr de $n+p$ ale lui Φ în raport cu $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = 0, \ \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} = 0$$

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0, \ \ldots, F_p = 0.$$

Se rezolvă acest sistem de $n+p$ ecuaţii cu $n+p$ necunoscute

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p.$$

3) Dacă $(a_1 a_2, \ldots, a_n, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ este o soluţie a acestui sistem, punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un punct staţionar condiţionat al funcţiei $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Punctele de extremum condiţionat ale funcţiei f se găsesc printre punctele staţionare condiţionate.

În continuare, pentru a stabili dacă unele puncte staţionare condiţionate sînt puncte de extremum condiţionat, trebuie să studiem diferenţa

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{6}$$

pentru punctele $(x_1, \ldots, x_n)$, care verifică sistemul $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots, F_p=0$, de unde rezultă că avem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \Phi(a_1, \ldots, a_n)$$

adică studiul diferenţei (6) se reduce la studiul diferenţei

$$E = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ s-au înlocuit cu $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Să presupunem acum că f şi $F_1, F_2, \ldots, F_p$ au derivate parţiale de ordinul trei pe X. Aplicînd formula lui Taylor funcţiei $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, avem cu $x_i - a_i = \mathrm{d}x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$E = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2\Phi(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j + R_2.$$

Semnul diferenţei E este dat de semnul formei pătratice în $\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$,

$$d^2\Phi(a_1, \ldots, a_n) = \sum \frac{\partial^2\Phi(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_i\,\partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j.$$

Dacă diferențiem sistemul legăturilor $F_1 = 0, \ldots, F_p = 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\,dx_n = 0 \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\,dx_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial F_p}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial F_p}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_p}{\partial x_n}\,dx_n = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

și pentru că prin ipoteză $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)} \neq 0$, $F_1, \ldots, F_p$ fiind independente, din sistemul (7) obținem cu ajutorul regulii lui Cramer pe $dx_1, dx_2, \ldots, dx_p$ în funcție de $dx_{p+1}, \ldots, dx_n$. Dacă le înlocuim în $d^2\Phi$, rezultă

$$d^2\Phi = \sum_{i,j=1}^{n-p} A_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

adică o formă pătratică în $n-p$ argumente dx_i. Prin urmare, conform teoremei enunțate la B., cap. VI, § 7, al. 2:

1) dacă toți determinanții

$$\Delta_1 = A_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_s = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss} \end{vmatrix}$$

$s = n - p$, sînt pozitivi, punctul $(a_1, \ldots, a_n)$ este un punct de minim condiționat;

2) dacă $(-1)^k\,\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-p$, punctul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un punct de maxim condiționat.

Exemple

1) Să se găsească extremele funcției

$$u = x^2 + y^2 + z^2,$$

cu legătura $ax + by + cz = 1$. Formăm funcția

$$\Phi(x, y, z; \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\,(ax + by + cz - 1)$$

pentru care căutăm punctele staționare

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x + \lambda a = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y + \lambda b = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z + \lambda c = 0$$

și

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = ax + by + cz - 1 = 0.$$

Acest sistem are soluția $\lambda = -\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$, $x = \frac{a}{a^2+b^2+c^2}$,

$$y = \frac{b}{a^2+b^2+c^2}, \quad z = \frac{c}{a^2+b^2+c^2}.$$

Pentru a vedea dacă punctul găsit este un maxim sau minim, calculăm diferențiala de ordinul doi a lui Φ. Avem

$$d^2\Phi = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2,$$

însă $a dx + b dy + c dz = 0$, $dz = -\frac{a dx + b dy}{c}$,

deci

$$d^2\Phi = 2dx^2 + 2dy^2 + \frac{2}{c^2}(a dx + b dy)^2.$$

Forma pătratică este pozitivă, deoarece este o sumă de pătrate, $d^2\Phi > 0$; prin urmare, în punctul

$$x = \frac{a}{a^2+b^2+c^2}, \quad y = \frac{b}{a^2+b^2+c^2}, \quad z = \frac{c}{a^2+b^2+c^2}$$

funcție $u(x, y, z)$ are un minim.

2) Să se dimensioneze o cutie paralelipipedică de volum dat, astfel ca suprafața cutiei, fără capac, să fie minimă.

Dacă x, y, z sînt dimensiunile cutiei de volum a^3, avem de studiat variația funcției

$$S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

cu legătura $xyz = a^3$.

Formăm funcția

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - a^3)$$

pentru care căutăm punctele staționare

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y + 2z + \lambda yz = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = x + 2z + \lambda xz$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2x + 2y + \lambda xy = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = xyz - a^3 = 0$$

sau

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{y} + \lambda = 0, \quad \frac{1}{z} + \frac{2}{x} + \lambda = 0$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{x} + \lambda = 0, \quad xyz = a^3.$$

Avem soluția

$$\lambda = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{a}, \quad x = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}a, \quad y = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}a, \quad z = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}a.$$

Pentru a vedea dacă soluţia găsită este un minim pentru S, calculăm diferenţiala a doua a lui Φ dat de

$$\Phi = xy + 2xz + 2yz - \frac{2\sqrt[3]{4}}{a}(xyz - a^3)$$

$$d^2\Phi = 2dxdy + 4dydz + 4dzdx - 4\ (dxdy + 2dydz + 2dzdx)$$

$$d^2\Phi = 2\ (dxdy + 2dydz + 2dzdx),$$

în care trebuie să ţinem seama de

$$yzdx + zxdy + xydz = 0,$$

calculat în punctul găsit. Avem

$$dz = -\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$$

şi $d^2\Phi$ se transformă în

$$d^2\Phi = -2\,dx\,dy - 4\ (dx + dy)\left(-\frac{1}{2}\ dx - \frac{1}{2}dy\right) = 2dx^2 + 2dy^2 + 2\,dxdy > 0.$$

Prin urmare, pentru

$$x = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}a \quad , \quad y = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}a \quad , \quad z = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}a$$

$S(x, y, z)$ este minimă.

3) Să găsim extremele funcţiei $f(x,y) = xy$ cu legătura $x^2 + y^2 = a^2$. Formăm funcţia ajutătoare

$$\Phi(x, y, \lambda) = xy + \lambda\ (x^2 + y^2 - a^2),$$

pentru care căutăm punctele staţionare

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0 \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Sistemul $2\lambda x + y = 0$, $x + 2\lambda y = 0$ nu trebuie să aibă numai soluţia $x = 0$, $y = 0$, deci

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0;\ \lambda_1 = +\frac{1}{2}\ ;\ \ \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Pentru $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $x = -y$; $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{-a}{\sqrt{2}}$; $x_2 = \frac{-a}{\sqrt{2}}$, $y_2 = +\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Pentru $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $x = y$; $x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $x_4 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_4 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Avem, prin urmare, patru puncte staţionare.

Pentru $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\Phi_1 = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a^2)$

$$d^2\Phi_1 = 2dxdy + dx^2 + dy^2 = (dx + dy)^2,$$

deci în punctele (x_1, y_1), (x_2, y_2) funcţia $f(x, y)$ este minimă.

Pentru $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\Phi_2 = xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a^2)$, $d^2\Phi_2 = 2dxdy - dx^2 - dy^2 =$ $= -(dx - dy)^2$; în punctele (x_3, y_3) şi (x_4, y_4) funcţia $f(x, y)$ este maximă.

Pentru această problemă putem proceda și în modul următor.

Funcțiile $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, verifică identic ecuația $x^2 + y^2 = a^2$: prin urmare, nu avem decît a căuta extremele funcției:

$F(t) = f(a \cos t, a \sin t) = a^2 \sin t \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, deoarece relația de legătură este identic satisfăcută

$$F'(t) = a^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t = a^2 \cos 2t$$

$$F'(t) = 0, \ \cos 2t = 0 \ , \ t_1 = \frac{\pi}{4}, \ t_2 = \frac{3\pi}{4}, \ t_3 = \frac{5\pi}{4}, \ t_4 = \frac{7\pi}{4}.$$

Derivata de ordinul al doilea

$$F''(t) = -2a^2 \sin 2t$$

ne arată că în punctele t_1 și t_3 avem maxime, iar pentru t_2 și t_4 avem minime.

Geometric, problema pusă revine la a găsi maximele și minimele cotei z a curbei de intersecție dintre cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ și paraboloidul hiperbolic $z = xy$.

Observație

A doua metodă poate fi folosită cînd se cunoaște o *reprezentare parametrică a legăturilor*

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ldots, F_p = 0,$$

și anume $x_1 = \varphi_1(s_1, \ldots, s_{n-p})$, $x_2 = \varphi_2(s_1, \ldots, s_{n-p})$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(s_1, \ldots, s_{n-p})$, definită pe $B \subset R^{n-p}$, care să verifice identic legăturile, iar pentru $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-p}) \in B$, $(x_1, \ldots, x_n)$ să parcurgă mulțimea A. În această situație, determinarea extremelor legate se reduce la determinarea extremelor libere ale funcției

$$y = f(\varphi_1(s_1, \ldots, s_{n-p}), \ldots, \varphi_n(s_1, \ldots, s_{n-p})) = F(s_1, s_2, \ldots, s_{n-p}).$$

§ 5. TRANSFORMĂRI PUNCTUALE

1. Transformări punctuale în R_n

Definiție. Fie

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

un sistem de n funcții definite pe o mulțime $X \subset R^n$. Cînd punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ parcurge mulțimea X, punctul $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ parcurge o mulțime $Y \subset R^n$.

Se spune că mulțimea Y este transformata mulțimii X prin intermediul sistemului (1). O transformare definită de sistemul (1) se numește o transformare punctuală în spațiul R^n.

Aplicații

1) O transformare

$$X = f(x, y)$$
$$Y = g(x, y)$$

cu funcțiile f și g definite pe un domeniu $D \subset R^2$ este o *transformare punctuală plană* (fig. 112).

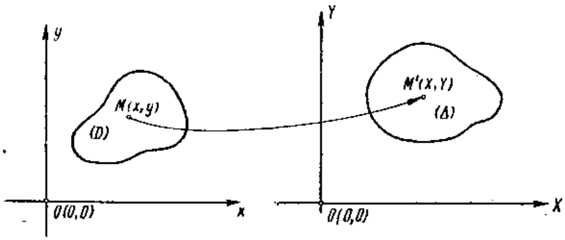


Fig. 112

2) O transformare

$$X = f(x, y, z)$$
$$Y = g(x, y, z)$$
$$Z = h(x, y, z)$$

cu funcțiile f, g, h definite pe un domeniu $V \subset R^3$ este o *transformare punctuală în spațiu* (fig. 113).

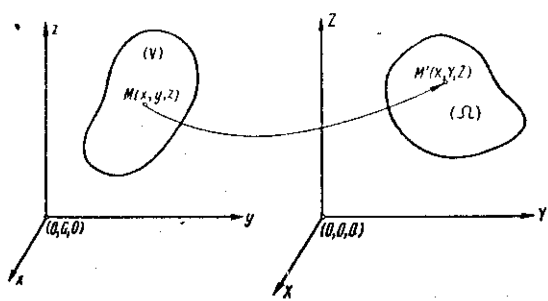


Fig 113

Exemple

1) Transformarea

$$X = x + y$$
$$Y = x - y$$

definită pe R^2 transformă planul R^2 în el însuşi. Fiecărui punct (x, y) din R^2 îi corespunde punctul $(x + y, x - y)$ din R^2.

2) Transformarea

$$X = x + y$$
$$Y = y + z$$
$$Z = z + x$$

definită pe R^3 transformă spaţiul R^3 în el însuşi.

2. Transformări regulate

Definiție. Fie

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

un sistem de n funcții reale definite pe o mulțime $X \subset R^n$ și $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ un punct interior lui X. Dacă

1) funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au derivate parțiale continue într-o vecinătate a punctului x_0,

2) determinantul funcțional

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{2}$$

este diferit de zero în punctul x_0, atunci se spune că transformarea punctuală (1) este o transformare regulată în punctul x_0.

Dacă transformarea este regulată în fiecare punct x interior lui X, se spune că transformarea este regulată pe X.

Observații

1) Dacă transformarea este regulată într-un punct interior mulțimii de definiție X, atunci transformarea este regulată într-o vecinătate V a lui x_0.

Într-adevăr, funcțiile $f_1, \ldots, f_n$ fiind continue și derivabile continuu într-o vecinătate a punctului x_0, cu determinantul funcțional nenul în punctul x_0, în virtutea continuității derivatelor parțiale, iacobianul este de asemenea o funcție continuă; prin urmare, există o vecinătate $V' \subset V$ a punctului x_0 în care de-

rivatele parțiale sînt continue, unde iacobianul $\neq 0$, deci transformarea este regulată pe V'.

2) Iacobianul unei transformări regulate pe un domeniu D păstrează același semn pe domeniul D.

Într-adevăr, iacobianul transformării regulate este o funcție continuă pe D, care, dacă ar lua valori de semne contrare în două puncte din D, ar trebui să se anuleze într-un punct din D, ceea ce nu se poate, deoarece transformarea este regulată pe D.

T e o r e m ă. Fie

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3}$$

o transformare regulată într-o vecinătate U a unui punct x_0 interior lui X ($X \subset R^n$, fiind mulțimea de definiție a funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$) care transformă punctul $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ în punctul $y_0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$.

1) Există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui x_0 și o vecinătate $V_0 \subset R^n$ a lui y_0 astfel încît fiecărui punct $y \in V_0$ să îi corespundă un punct $x \in U_0$ definit de

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{4}$$

2) Transformarea definită de (4), numită transformarea inversă transformării (1), este regulată în punctul y_0.

3) Dacă

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \quad \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

sînt determinanții funcționali ai transformării (3) și (4), atunci avem relația

$$\left.\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x_0} \cdot \left.\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right|_{y_0} = 1.$$

Demonstrație. Fie $y_0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ valorile funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ în punctul $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in U$. Dacă considerăm acum sistemul de n funcții implicite

$$\begin{aligned} y_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ y_2 - f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots& \\ y_n - f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, definite pe $X \times R^n \subset R^{n+n}$, în punctul $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ îndeplinește toate condițiile teoremei III de existență de la B., cap. VII, § 2, al. 2, privitoare la sisteme de funcții implicite, în care se consideră $x_1, x_2, \ldots, x_n$, funcțiile definite de sistemul (3). Prin urmare, sistemul (3) definește pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$, funcții de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ într-o vecinătate a punctului (x_0, y_0), $U_0 \times V_0$, $U_0 \subset U$, $V_0 \subset R^n$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{5}$$

astfel încît $x_{i0} = \varphi_i(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Funcțiile (5) verifică identic sistemul (3) și au derivate parțiale continue; prin urmare, punctului $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V_0$ îi corespunde punctul unic $x \in U_0$ de coordonate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Să calculăm determinantul funcțional al transformării (5) și să arătăm că este diferit de zero pentru orice punct $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V_0$.

Pentru aceasta înlocuim pe φ_k în sistemul (3)

$$\begin{aligned} f_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) - y_1 &= 0 \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) - y_2 &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) - y_n &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

pe care îl *verifică identic*, și derivăm în raport cu y_i; avem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} = 1 \\ &\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} = 0, \end{aligned}$$

care se scrie, folosind simbolul lui Kronecker,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} = \delta_{1j} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

În general avem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} = \delta_{ij} \quad , \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Să observăm că produsul determinanţilor funcţionali

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \tag{7}$$

este determinantul

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \right| = |\delta_{ij}| = 1. \tag{8}$$

Prin urmare, $\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0$ pe V_0, deoarece $\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0$ pe U_0.

Am arătat astfel că transformarea (5) este regulată pe V_0. În fine, din (7) şi (8) rezultă şi relaţia

$$\left.\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x_0} \cdot \left.\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right|_{y_0} = 1.$$

Teorema este complet demonstrată. O *transformare regulată* se mai numeşte şi *transformare proprie, reversibilă* sau *nesingulară.*

Aplicaţii

1) Rototranslaţiile din plan sînt transformări regulate pe R^2.
Formulele de transformare sînt

$$x = x_0 + u \cos\theta + v \sin\theta \qquad (u, v) \in R^2$$
$$y = y_0 - u \sin\theta + v \cos\theta$$

Determinantul funcţional al transformării

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1, \text{ pentru orice } (u, v) \in R^2.$$

Avem şi

$$u = \begin{vmatrix} x - x_0 & \sin\theta \\ y - y_0 & \cos\theta \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} \cos\theta & x - x_0 \\ -\sin\theta & y - y_0 \end{vmatrix}$$

adică

$$u = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta$$
$$v = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta$$

şi

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1, \text{ pentru orice } (x, y) \in R^2.$$

2) Rototranslaţiile din spaţiu sînt transformări regulate în tot spaţiul.
Formulele de transformare sînt

$$x = x_0 + u\alpha + v\beta + w\gamma$$
$$y = y_0 + u\alpha' + v\beta' + w\gamma'$$
$$z = z_0 + u\alpha'' + v\beta'' + w\gamma''$$

cu

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad , \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \quad , \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1$$

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \quad , \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0 \quad , \quad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0$$

Determinantul funcţional al transformării

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

are pătratul egal cu 1, deci pentru orice $(u, v, w) \in R^3$ transformarea este regulată şi se poate inversa.

3) Transformarea prin coordonate polare în plan

$$x = \rho \cos \theta, \; y = \rho \sin \theta \quad , \quad \rho \in [0, \infty) \quad , \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

are determinantul funcţional

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho,$$

deci pentru $\rho > 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, se poate inversa:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \; \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

4) Transformarea prin coordonate polare în spaţiu (fig. 114),

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi \quad , \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad z = \rho \cos \theta$$

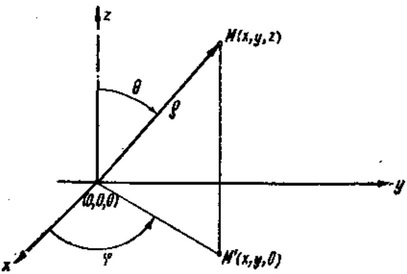


Fig. 114

definită pentru $\rho \in [0, \infty)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$

are determinantul funcţional

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta$$

este reversibilă într-o vecinătate a punctului $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ dacă $\rho_0 \neq 0$, $\theta_0 \neq 0$ şi $\theta_0 \neq \pi$.

3. Compunerea transformărilor

Fie

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ u_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

o transformare T_1 a mulțimii $X \subset R^n$ în mulțimea $U \subset R^n$ și

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ y_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

o transformare T_2 a mulțimii $U \subset R^n$ în mulțimea $Y \subset R^n$.

Transformarea τ dată de

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\ y_2 &= \varphi_2(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

care transformă pe X în Y se numește transformarea compusă a transformării T_1 cu T_2: $\tau = T_2(T_1)$.

În legătură cu compunerea a două transformări avem următoarea

Teoremă. 1) **Fie**

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ u_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

n funcții definite pe $X \subset R^n$ cu valori în $U \subset R^n$, care formează o transformare regulată în punctul $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ interior lui X.

2) **Fie**

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ y_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

n funcții definite pe U valori în R^n, care formează o transformare regulată în punctul $U_0 = U(x_0)$ interior lui U.

În aceste condiții

1') transformarea compusă a celor două transformări

$$y_1 = \varphi_1 (f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
$$y_2 = \varphi_2 (f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = \varphi_n (f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

este o transformare τ regulată în punctul x_0;

2') dacă

$$\left.\frac{D (u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D (x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x=x_0}$$

este valoarea determinantului funcțional al transformării T_1 în punctul $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ și

$$\left.\frac{D (y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D (u_1, u_2, \ldots, u_n)}\right|_{u=u_0}$$

este valoarea determinantului funcțional al transformării T_2 în punctul $u_0 = (u_1 (x_0), u_2 (x_0), \ldots, u_n (x_0))$, avem relația

$$\left.\frac{D (y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D (x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{D (y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D (u_1, u_2, \ldots, u_n)}\right|_{u=u_0} \cdot \left.\frac{D (u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D (x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x=x_0}$$

unde $\left.\frac{D (y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D (x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{x=x_0}$ este valoarea determinantului funcțional al transformării compuse τ în punctul x_0.

Demonstrație. Dacă T_1 este o transformare regulată într-un punct $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ interior mulțimii X, există o vecinătate V a punctului x_0 în care $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt continue, cu derivate parțiale continue și cu $\frac{D (u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D (x_1, x_2, \ldots, x_n)} \not\equiv 0$.

Transformarea T_2 fiind regulată în punctul $u_0 = (u_1 (x_0), u_2 (x_0), \ldots, u_n (x_0))$ interior mulțimii U, urmează că există o vecinătate W a punctului u_0 în care funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sînt continue, cu derivate parțiale continue și $\frac{D (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D (u_1, u_2, \ldots, u_n)} \not\equiv 0$. Putem alege pe V și W astfel încît pentru $x \in V$, $u (x) \in W$.

Rezultă de aici că funcțiile compuse

$$y_1 = \varphi_1 (f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
$$y_2 = \varphi_2 (f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = \varphi_n (f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

sînt continue şi au derivate parţiale continue pe V. Pentru a arăta că transformarea obţinută este regulată în x_0, rămîne să mai arătăm că $\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ nu este nul în punctul x_0. Să derivăm pe $y_1, \ldots, y_n$ în punctul $(x_1, \ldots, x_n)$, ca funcţii compuse; avem

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_k},$$

cu $k = 1, 2, \ldots, n$. Dacă observăm că determinantul care are ca element α_{ij} de pe linia i şi coloana j pe

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

este produsul a doi determinanţi de elemente $\beta_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_j}$, $\gamma_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, adică $|\alpha_{ij}| = |\beta_{ij}| \cdot |\gamma_{ij}|$, urmează egalitatea

$$\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right| = \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial f_j}\right| \cdot \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \tag{1}$$

care nu este altceva decît egalitatea

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)} \cdot \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Determinanţii din partea a doua, calculaţi în punctul u_0 şi x_0, respectiv, sînt diferiţi de zero, deci şi determinantul funcţional al transformării compuse este diferit de zero în punctul x_0. Punctul 1′ este demonstrat. Dacă se schimbă φ_i cu y_i şi f_i cu u_i, rezultă şi punctul 2′.

Teorema este complet demonstrată.

Exemplu

Fie transformările

$$(T_1)\quad u_1 = x + y,\quad u_2 = x - y, \text{ definită pentru } x, y \in R^2,$$

şi

$$(T_2)\quad v_1 = u_1 u_2,\ v_2 = u_1^2 - u_2^2, \text{ definită pe } R^2 - (0, 0).$$

Transformarea compusă $\tau = T_2(T_1)$

$$v_1 = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$
$$v_2 = (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

este **definită** pe $R^2 - (0, 0)$. Într-adevăr, avem

$$\frac{D(u_1, u_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad \frac{D(v_1, v_2)}{D(u_1, u_2)} = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ 2u_1 & -2u_2 \end{vmatrix} = -2\ (u_1^2 + u_2^2)$$

$$\frac{D(v_1, v_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 4y & 4x \end{vmatrix} = +8\ (x^2 + y^2).$$

Același rezultat îl obținem din compunerea celor două transformări

$$\frac{D(v_1, v_2)}{D(x, y)} = 4\,((x + y)^2 + (x - y)^2) = 8\,(x^2 + y^2).$$

Capitolul VIII

SCHIMBĂRI DE VARIABILE

Rezolvarea multor probleme se simplifică prin schimbarea variabilelor independente sau ale funcţiilor care intervin în relaţiile care reprezintă faptul teoretic sau practic respectiv. În acest capitol regrupăm o parte din rezultatele obţinute în diferite părţi ale cursului, completîndu-le cu altele noi, pentru a prezenta unitar diverse aspecte ale acestei metode matematice, „metoda schimbării variabilelor", una din cele mai des folosite şi cu cele mai variate aplicaţii. Vom face exemplificări suficiente pentru a pune în evidenţă importanţa ei.

§ 1. SCHIMBAREA VARIABILELOR INDEPENDENTE

1. Schimbarea variabilelor independente la funcţiile de o variabilă

Fie funcţia $y = f(x)$ definită pe $X \subset R$ cu valori în $Y \subset R$ şi funcţia $x = \varphi(t)$ definită pe $T \subset R$ cu valori în $X \subset R$.

Funcţiile f şi φ sînt derivabile de n ori pe X şi T respectiv şi $\varphi'(t) \neq 0, t \in T$. Transformarea

$$y = f(x), \quad x = \varphi(t)$$

realizează o corespondenţă între mulţimea T şi mulţimea Y (fig. 115).

Ecuaţiile $y = f(x)$, $x \in X$ sau $y = f(\varphi(t))$, $x = \varphi(t)$, $t \in T$ reprezintă aceeaşi curbă (C). Studiul curbei (C) în noua variabilă t necesită exprimarea derivatelor

$$\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^2y}{dx^2}, \ \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

cu ajutorul derivatelor

$$\frac{dy}{dt}, \ \frac{d^2y}{dt^2}, \ \frac{d^3y}{dt^3}, \ldots$$

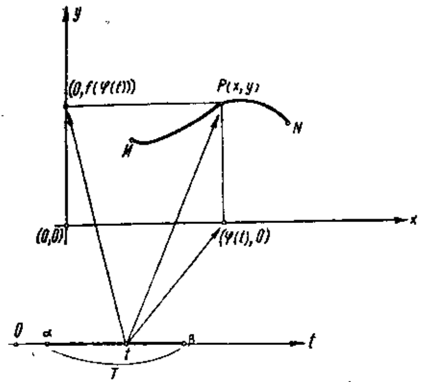


Fig. 115

După regula de derivare a funcţiilor compuse avem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

însă $dx = \varphi'(t)\, dt$ sau $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$, astfel încît obţinem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior să observăm că operatorul

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{d}{dt}$$

care ne dă regula de calcul a derivatei y'_x cu ajutorul derivatei y'_t ne conduce imediat la y''_{xx}; într-adevăr, nu avem decît „să aplicăm" acest operator derivatei întîi. Avem

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\varphi'(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt}\right),$$

deci

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'^3(t)}\left[\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t)\frac{dy}{dt}\right].$$

În mod asemănător avem şi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{1}{\varphi'(t)} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\varphi'^3}\left(\varphi'\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''\frac{dy}{dt}\right)\right]$$

deci

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{\varphi'^5}\left[\varphi'^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\varphi'\varphi''\frac{d^2y}{dt^2} + (3\varphi''^2 - \varphi'\varphi''')\frac{dy}{dt}\right].$$

Aplicaţii

1) Formulele stabilite permit studiul curbelor date parametric $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Într-adevăr, dacă în $y = f(x)$ punem $x = \varphi(t)$, obţinem $y = f(\varphi(t)) = \psi(t)$.

a) Ecuaţia tangentei

$$y - y_0 = y'(x_0)\,(x - x_0).$$

Dacă pentru $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, atunci

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad \varphi'(t_0) \neq 0,$$

şi ecuaţia tangentei se scrie

$$y - \psi(t_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - \varphi(t_0)).$$

b) Raza de curbură

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

pentru curba dată parametric are expresia simetrică

$$R = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi'} .$$

2) Să găsim în ce se transformă ecuația diferențială

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

dacă facem schimbarea de variabile $x = e^t$.

Avem

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

și ecuația se transformă în

$$a \frac{d^2y}{d^2t} + (b - a) \frac{dy}{dt} + cy = 0 .$$

Se va vedea mai tîrziu că putem găsi soluțiile ecuației (2). Inlocuind pe t cu $\ln x$, obținem astfel și soluțiile ecuației (1).

2. Schimbarea variabilelor independente la funcțiile de două variabile

Fie funcția $z = f(x, y)$ definită pe $X \subset R^2$ cu valori în $Z \subset R$ și funcțiile

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

definite pe $V \subset R^2$ astfel ca $(x, y) \in X \subset R^2$. Transformarea

$$z = f(x, y) \qquad x = \varphi(u, v) \qquad y = \psi(u, v)$$

realizează o corespondență între mulțimea V și mulțimea Z (fig. 116).

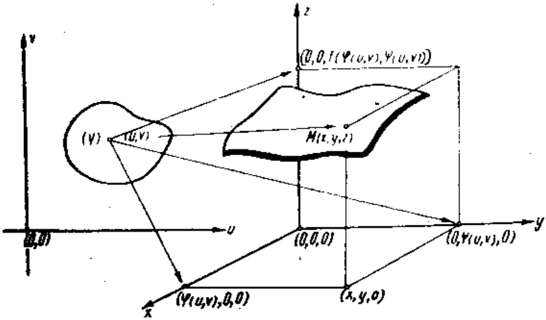


Fig. 116

Ecuațiile $z = f(x, y)$, $(x, y) \in X$ sau $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$, $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $(u, v) \in V$ reprezintă aceeași suprafață (S).

În ipoteza că f este derivabilă parțial de n ori pe X și φ, ψ derivabile parțial de n ori pe V, studiul suprafeței (S) în noile variabile (u, v) necesită exprimarea derivatelor parțiale

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots$$

cu ajutorul derivatelor parțiale

$$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \ldots$$

Dacă diferențiem pe z, ca funcție de x, y sau ca funcție de u, v, avem

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v,$$

$$\text{însă } \mathrm{d}x = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}y = \frac{\partial \psi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\,\mathrm{d}v,$$

deci oricare ar fi $\mathrm{d}u$ și $\mathrm{d}v$ trebuie să avem

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) = \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

prin urmare, coeficienții lui $\mathrm{d}u$ și $\mathrm{d}v$ trebuie să fie egali

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dacă determinantul funcțional $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \not\equiv 0$ în V, adică transformarea $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ este regulată în V, din sistemul (1) obținem pe $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$, și anume

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}} \tag{2}$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior putem proceda la fel. Să observăm însă că formulele (2) introduc doi operatori

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \right), \tag{4}$$

care ne permit să calculăm derivatele parțiale de ordin superior.

Pentru calculul lui $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ este suficient să „aplicăm" operatorul (3) lui $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Aplicații

1) Formulele stabilite servesc la studiul suprafețelor date parametric $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$. Într-adevăr, dacă în $z = f(x, y)$ punem $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, obținem $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = \chi(u, v)$.

a) Ecuația planului tangent la suprafața $z = f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0, z_0) este

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \text{ cu } p = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y},$$

însă avem

$$dz = p dx + q dy \tag{5}$$

$$dz = \frac{\partial \chi}{\partial u} du + \frac{\partial \chi}{\partial v} dv, \; dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \; dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$$

și înlocuind în (5) obținem, egalînd coeficienții lui du și dv,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial u} &= p \frac{\partial \varphi}{\partial u} + q \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} &= p \frac{\partial \varphi}{\partial v} + q \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{aligned} \tag{6}$$

Derivatele parțiale ale lui χ, φ, ψ în (6) sînt calculate în punctul (u_0, v_0), care corespunde punctului (x_0, y_0, z_0) de pe suprafață. Eliminînd pe p și q între ecuațiile (6) și ecuația planului tangent, obținem ecuația planului tangent al suprafeței date parametric

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

sau, cu ajutorul determinanților funcționali,

$$(x - x_0) \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)} + (y - y_0) \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)} + (z - z_0) \frac{D(\varphi, \psi)}{(D u, v)} = 0 \tag{7'}$$

b) Din (7') rezultă şi ecuaţia normalei la suprafaţă în punctul (x_0, y_0, z_0) de pe suprafaţă

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}},$$

determinanţii funcţionalei de la numitor fiind şi aici calculaţi în punctul (u_0, v_0).

2) În ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a = \text{const.},$$

numită şi ,,ecuaţia coardei vibrante", să facem schimbarea de variabile

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta),\ t = \frac{1}{2a}(\xi - \eta),\ (\xi, \eta) \in R^2 . \tag{8}$$

Avem, folosind formulele stabilite anterior,

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2a}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2a}\frac{\partial z}{\partial t},$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta};\ \ \frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial z}{\partial \xi} - a\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Am obţinut operatorii

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta},\ \ \frac{\partial}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi} - a\frac{\partial}{\partial \eta},$$

care ne permit să calculăm derivatele parţiale de ordinul doi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(a\frac{\partial}{\partial \xi} - a\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(a\frac{\partial z}{\partial \xi} - a\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right).$$

În noile variabile ξ, η ecuaţia dată se scrie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \text{ sau } \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Prin urmare $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ nu depinde de η. Dacă punem

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f'(\xi),$$

urmează că $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, unde f şi g sînt două funcţii arbitrare derivabile de două ori.

Din relațiile (8) avem, rezolvînd în raport cu ξ și η,

$$\xi = x + at, \qquad \eta = x - at, \qquad (x, t) \in R^2 .$$

Am obținut astfel următoarea soluție a ecuației coardei vibrante

$$u = f(x + at) + g(x - at),$$

soluție care conține două funcții arbitrare. Funcția u găsită se numește „integrala generală" a ecuației coardei vibrante.

3) În ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

numită „ecuația lui Laplace", să facem schimbarea de variabile

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta,$$

din care obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} .$$

Am obținut astfel operatorii

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta},$$

care ne permit să calculăm derivatele de ordinul doi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\sin 2\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin 2\theta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} +$$

$$+ \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin 2\theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} .$$

Adunîndu-le, obţinem transformata ecuaţiei lui Laplace în coordonate polare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

4) În ecuaţia cu derivate parţiale

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

să facem schimbarea de variabile $x = u$, $y = uv$. Deoarece $u = x$, $v = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, putem folosi formulele

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot$$

Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},\ u \neq 0.$$

Am obţinut operatorii

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{v}{u}\cdot\frac{\partial}{\partial v},\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{u}\ \frac{\partial}{\partial v},$$

deci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{v}{u}\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u}\,\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\,\frac{v}{u}\,\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2v}{u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{v}{u}\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{1}{u}\,\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{1}{u^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

astfel încît ecuaţia se scrie $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$, fapt ce ne permite s-o integrăm.

Într-adevăr, $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial u} = f(v)$; prin urmare, $z = uf(v) + g(v)$, f şi g fiind două funcţii arbitrare derivabile. Revenind la variabilele iniţiale, obţinem *integrala generală* a ecuaţiei date, şi anume $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$.

§ 2. SCHIMBĂRI DE VARIABILE ŞI DE FUNCŢII

1. Transformarea punctuală a curbelor plane

O transformare punctuală

$$X = f(x, y)$$
$$Y = g(x, y) \qquad (1$$

cu f şi g două funcţii definite pe $A \subset R^2$ transformă o curbă $C : y = \varphi(x)$ într- curbă $\Gamma : Y = \Phi(X)$. În ipoteza că f şi g sînt derivabile parţial de n ori pe A ne propunem să calculăm derivatele

$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}, \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}X^2}, \ldots$ cu ajutorul derivatelor $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots$, în ipoteza că aceste din urmă există.

Avem

$$\mathrm{d}X = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}Y = \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Prin urmare,

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} : \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

dacă $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \neq 0$. Pentru calculul derivatelor de ordin superior, folosi operatorul

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} = \frac{1}{X'_x} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \; X'_x \neq 0.$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}X^2} = \frac{1}{X'_x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right).$$

Aplicaţie

O transformare punctuală curentă este trecerea ecuaţiei unei curbe plane în coordona polare $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, unde r trebuie considerat funcţie de θ, $r(\theta)$. Ne propunem găsim expresia razei de curbură

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \qquad ($$

în coordonate polare.

În acest scop trebuie să exprimăm derivatele y', y'' cu ajutorul lui r', r''. Avem

$$dx = dr \cos\theta - r \sin\theta \, d\theta$$

$$dy = dr \sin\theta + r \cos\theta \, d\theta,$$

deci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dr \sin\theta + r\cos\theta \, d\theta}{dr \cos\theta - r\sin\theta \, d\theta} = \frac{r' \sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r'\cos\theta - r\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\,\frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3}$$

Înlocuindu-le în (2), obținem

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

2. Transformări de contact

Fie (C) și (C') două curbe plane, avînd un contact de ordinul întîi într-un punct M_0. În punctul M_0 cele două curbe sînt tangente. Se spune că cele două curbe au în punctul M_0 același *element de contact* dacă sistemul de trei numere $(x_0, y_0, y'(x_0))$ este același pentru cele două curbe.

Definiție. Se spune că o transformare este o transformare de contact dacă păstrează elementele de contact.

Teoremă. Transformările punctuale sînt transformări de contact.

Demonstrație. Dacă $X = f(x, y)$, $Y = g(x, y)$ este o transformare definită pe $A \subset R^2$ cu f și g derivabile pe A, avem

$$\frac{dY}{dX} = \frac{g'_x + g'_y\, y'}{f'_x + f'_y\, y'}.$$

Două curbe tangente se transformă în două curbe tangente, deoarece elementul de contact $(x_0, y_0, y'(x_0))$ este același pentru curbele transformate, întrucît X, Y și $\frac{dY}{dX}$ depind numai de x, y, $\frac{dy}{dx}$.

Transformările punctuale nu sînt singurele transformări de contact.

Teoremă. Fie

$$X = f(x, y, y')$$

$$Y = g(x, y, y')$$

o transformare T definită pe $A \subset R^2$, cu funcțiile f și g derivabile parțial în raport cu x, y, y' pe A. Transformarea T este o transformare de contact pe A dacă

$$\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y'}}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}}, \quad \textbf{pentru } (x, y) \in A.$$

Demonstrație. Pentru ca transformarea să fie de contact este suficient ca $\dfrac{dY}{dX}$ să nu depindă decît de x, y, $\dfrac{dy}{dx}$. Avem

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial g}{\partial y'} \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial y'} \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2}}.$$

Să observăm că o expresie de forma $\dfrac{a + bx}{a' + b'x}$ este independentă de x dacă $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$. Într-adevăr, cu $a = ka'$, $b = kb'$ obținem

$$\frac{a + bx}{a' + b'x} = \frac{ka' + xkb'}{a' + b'x} = k.$$

Ținînd seama de acest fapt, pentru ca $\dfrac{dY}{dX}$ să nu depindă de y'', dacă $f'_{y'} \neq 0$, $g_{y'} \neq 0$, este suficient ca

$$\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y'}}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}}$$

și teorema este demonstrată.

Transformările punctuale sînt un caz particular al acestor transformări mai generale.

Exemple

1) Transformarea $X = y'$, $Y = xy' - y$, numită transformarea lui Legendre, este o transformare de contact. Într-adevăr

$$\frac{dY}{dX} = \frac{xy'' + y' - y'}{y''} = x, \qquad y'' \neq 0.$$

2) Transformarea $X = x - \dfrac{y}{y'}$, $Y = xy' - y$, $y' \neq 0$ este o transformare de contact. Într-adevăr, dacă y, y', $y'' \neq 0$,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{xy'' + y' - y'}{1 - 1 + \dfrac{yy''}{y'^2}} = \frac{xy'^2}{y}.$$

3. Transformarea punctuală a suprafeţelor

O transformare punctuală

$$X = f(x, y, z)$$
$$Y = g(x, y, z)$$
$$Z = h(x, y, z)$$

cu f, g, h funcţii definite pe o mulţime $A \subset R^3$ transformă ecuaţia $z = \varphi(x, y)$ în ecuaţia $Z = \Phi(X, Y)$. În ipoteza că f, g, h sînt derivabile parţial de n ori pe A, ne propunem să calculăm derivatele parţiale

$$\frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}, \ldots$$

cu ajutorul derivatelor

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots,$$

dacă aceste derivate există.

Avem

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial X} dX + \frac{\partial Z}{\partial Y} dY, \tag{1}$$

însă

$$dX = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$dY = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

şi

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

care, înlocuite în (1), conduc la relaţia

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy =$$
$$= \frac{\partial Z}{\partial X}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy\right] +$$
$$+ \frac{\partial Z}{\partial Y}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy\right],$$

egalitate ce trebuie să fie adevărată oricare ar fi dx și dy. Ajungem astfel la sistemul în $\frac{\partial Z}{\partial X}$ și $\frac{\partial Z}{\partial Y}$

$$\frac{\partial Z}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial Z}{\partial Y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial Z}{\partial Y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

care rezolvat ne dă

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}}$$

sau

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=\frac{\begin{vmatrix}h'_x & g'_x & z'_x\\ h'_y & g'_y & z'_y\\ h'_z & g'_z & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f'_x & g'_x & z'_x\\ f'_y & g'_y & z'_y\\ f'_z & g'_z & -1\end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial Z}{\partial Y}=\frac{\begin{vmatrix}f'_x & h'_x & z'_x\\ f'_y & h'_y & z'_y\\ f'_z & h'_z & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f'_x & g'_x & z'_x\\ f'_y & g'_y & z'_y\\ f'_z & g'_z & -1\end{vmatrix}} \tag{2}$$

dacă determinantul de la numitor este diferit de zero.

Exemplu

Fie transformarea punctuală

$$u = yz, \quad v = zx, \quad w = xy.$$

Avem, aplicînd formulele de mai sus,

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{x}{z} \cdot \frac{x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} + z}{x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{y}{z} \cdot \frac{-x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z}{x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z}$$

pentru toate punctele suprafeței $z = \varphi(x, y)$, astfel încît

$$z\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right) \neq 0.$$

O transformare T în spațiu se numește transformare de contact dacă transformă două suprafețe tangente în două suprafețe tangente.

În spațiu, elementul de contact este format de sistemul de cinci numere $\left(x_0, y_0, z_0, \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$, deci pentru două suprafețe tangente în punctul (x_0, y_0, z_0) elementul de contact este același. Transformările punctuale ale suprafețelor sînt transformări de contact, deoarece, după cum rezultă din formulele de transformare (2), elementul de contact se păstrează, pentru că $\frac{\partial Z}{\partial X}$ și $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ nu depind decît de x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$. O transformare mai generală

$$X = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad Y = g\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$Z = h\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

este o transformare de contact dacă $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ nu depind de derivatele parțiale de ordinul doi ale lui z.

Exemplu

Transformarea lui Ampère

$$X = x, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = y\frac{\partial z}{\partial y} - z$$

este o transformare de contact. Avem

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial X}dX + \frac{\partial Z}{\partial Y}dY,$$

$$dX = dx, \quad dY = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy, \quad dZ = \frac{\partial z}{\partial y}dy + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx +$$

$$+ y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy - \frac{\partial z}{\partial x}dx - \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

sau

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dx + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy - \frac{\partial z}{\partial x}\,dx = \frac{\partial Z}{\partial X}\,dx + \frac{\partial Z}{\partial Y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right),$$

deci

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial Y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial Z}{\partial Y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

dacă

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \neq 0;$$

atunci

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = y\,.$$

Prin urmare, transformarea este de contact.

BIBLIOGRAFIE

1. ANGELESCU, A., *Calcul diferențial*, Cluj, 1927.
2. ANGHELUȚĂ, TH., *Curs de algebră superioară*, vol. I, 1943, vol. II, 1945, Cluj, Ed. universității.
3. ANGHELUȚĂ, TH., *Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă*, Buc., Ed. tehnică, 1957.
4. BUDEANU, C., GHEORGHIU, M., HORTOPAN, V., ȘTEFĂNESCU, N., *Bazele teoretice ale electrotehnicii. Probleme*, vol. I, 1958, vol II, 1959, Buc., Ed. tehnică.
5. CIORĂNESCU, N., *Curs de algebră și analiză matematică*, Buc., Ed. tehnică, 1955.
6. CIORĂNESCU, N., și ROȘCULEȚ, M., *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică*, Buc., Ed. tehnică, 1959.
7. CIORĂNESCU, N., *Tratat de matematici speciale*, Ed. didactică și pedagogică, Buc., 1962.
8. DEMIDOVICI, P. B., *Culegere de probleme și exerciții de analiză matematică*, Buc., Ed. tehnică, 1956.
9. FADEEV, D. K. și SOMINSKI, I. S., *Culegere de probleme de algebră superioară*, Buc., Ed. tehnică, 1954.
10. FRODA, A., *Algebră superioară*, Buc., Ed. Acad. R.P.R., 1958.
11. GHIUNTER, N. M. și CUZMIN, R. O., *Culegere de probleme de matematici superioare*, 3 vol., ed. a 3-a, Buc., Ed. tehnică, 1953.
12. GHELFAND, M. I., *Lecții de algebră liniară*, Buc., Ed. tehnică, 1953.
13. GOURSAT ,E., *Cours d'Analyse mathématique*, vol. I, 1933, vol. II, 1942, vol. III, 1923, Paris, Ed. Gauthier-Villars.
14. GUTMANN, M., *Probleme de calcul vectorial*, Buc., Ed. tehnică, 1961.
15. HINCIN, I.A., *Curs scurt de analiză matematică*, Buc., Ed. tehnică, 1956.
16. IACOB, CAIUS, *Curs de matematici superioare*, Buc., Ed. tehnică, 1957.
17. IONESCU, VIORICA, *Curs de algebră*, Buc., Ed. didactică de stat și pedagogică, 1961.
18. KUROȘ, G. A., *Curs de algebră superioară*, Buc., Ed. tehnică, 1955.
19. LUZIN, N. N., *Calculul diferențial*, Buc., Ed. tehnică, 1954.
20. LALESCU, TR., *Tratat de geometrie analitică*, Buc., Colecția „Numerus", 1938.
21. MOISIL, GR., *Introducere în algebră*, vol. I, Inele și ideale, Buc., Ed. Acad. R.P.R., 1954.
22. MILLER — LEBEDEV, VERA, *Lecții de algebră*, Buc., Ed. Acad. R.P.R., 1953.
23. NICOLESCU, MIRON, *Calculul diferențial*, Buc., Ed. Victoriei, 1949.
24. NICOLESCU, MIRON, *Analiză matematică*, vol. I, 1957, vol. II, 1958, Buc., Ed. tehnică.
25. NICOLESCU, MIRON, DINCULEANU, N., MARCUS, S., *Manual de analiză matematică*, vol. I, 1962, Buc., Ed. didactică și pedagogică.
26. NATHANSON, P. I., *Teoria funcțiilor de variabilă reală*, Buc., Ed. tehnică, 1957.
27. ONICESCU, O., și GALBURĂ GH., *Algebră*, vol. I, Buc., Colecția „Natura", 1948.

28. PICARD, EMIL, *Traité d'analyse*, 3 vol., Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1922.
29. RACLIŞ, NICULAI, *Tratat elementar de matematici generale. Calculul diferenţial. Calculul integral.*, Buc., 1945.
30. RÎJIC, M. I. şi GRADSTEIN, S. I., *Tabele de integrale, sume, serii şi produse*, Buc., Ed. tehnică, 1955.
31. SABAC, GH. I., *Matematici superioare*, vol. I, Buc., Lit. inst. polit., 1953.
32. SMIRNOV, I. V., *Curs de matematici superioare*, vol. I — IV, Buc., Ed. tehnică, 1953—1956.
33. STOILOW, S., *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, vol. I, Buc., Ed., Acad., R.P.R. 1954.
34. TEODORESCU, N., *Metode vectoriale în fizica matematică*, vol. I şi II, Buc., Ed. tehnică, 1954.
35. TEODORESCU, N., *Calculul numeric şi grafic*, Buc., Lit. inst. polit., 1951.
36. TINO, O., MURGULESCU, E., BĂNĂRESCU, V., *Curs de geometrie analitică*, Buc., Tip. învăţămîntului, 1957.
37. VRĂNCEANU GH. *Geometrie analitică şi proiectivă*, Buc., Ed. tehnică, 1954.

CUPRINSUL

Algebra

CAP. I. Mulțimi. Numere. Structuri

CAP. II. Analiza combinatorie

CAP. III. Determinanți. Matrice

CAP. IV. Sisteme de ecuații liniare

Calculul diferențial

CAP. I. Șiruri și serii de numere

CAP. II. Funcții. Limite. Continuitate

CAP. III. Funcții elementare

CAP. VIII. Schimbări de variabile

Redactor responsabil: ing. AMUZESCU ANA
Tehnoredactor: PRUȘAN TAMARA

Dat la cules 20.04.64. Bun de tipar 15.VI. Apărut 1964. Tiraj 7.500+125 1/1 pergamoid. Hîrtie scris tip I 80 g/m², 16/70×100. Coli editoriale 27,363. Coli de tipar 29,50. A 3549. C.Z. pentru bibliotecile mari 517(075.8). C. Z. pentru bibliotecile mici 51.

Tiparul executat la Întreprinderea Poligrafică „Informația" Strada Brezoianu 23—25, București, R.P.R.